Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
17.05.2022
Blatt 06

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 21 (4 Punkte) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \qquad x_1 = a \in \mathbb{R}.$$

(a) Untersuchen Sie, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.
(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die als Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Frage kommen.
(c) Untersuchen Sie - in Abhängigkeit vom Startwert $a \in \mathbb{R}$ - ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bzw. konvergent ist.

Aufgabe 22 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Ergebnisse:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[p]{n}}, \qquad p \in \mathbb{N}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \qquad a \in \mathbb{R}^+$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}, \qquad p \in \mathbb{N}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$

Hinweis zu (d): Sandwich-Theorem

Aufgabe 23 (4 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für das in (a) $<$ und in (b) $>$ gilt. Leiten Sie ferner entsprechende Ungleichungen für $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ her.

Hinweis: Bereits für Teil (b) beachte man $\liminf_{n\to\infty}(-c_n) = -\limsup_{n\to\infty} c_n$.

Aufgabe 24 (4 Punkte) Herr Hase ist ein begeisterter Jogger. Eines Morgens macht er sich auf und läuft zunächst 16 Kilometer nach Osten. Dann biegt er nach Norden ab und legt 8 Kilometer zurück, um anschliessend 4 Kilometer in westlicher Richtung zu laufen. Es folgen 2 Kilometer nach Süden, ein Kilometer nach Osten usw.

Sein Bekannter, Herr Igel, ist weniger sportbegeistert und wandert lieber gemächlichen Schrittes, mitunter auch querfeldein. Dementsprechend ist er auch nur halb so schnell unterwegs wie Herr Hase. Er macht sich exakt zur selben Zeit und vom selben Ort auf und geht - ungefähr - in ost-nord-östlicher Richtung, ohne auch nur einmal diese Richtung zu ändern. Nach ihrer Rückkehr am Abend behauptet Herr Igel, er habe Herrn Hase an seinem Zielort bereits erwartet, als dieser dort eingelaufen sei, und das, obwohl er selbst, auf dem Weg dorthin, sich noch eine kurze Pause gegönnt habe. Herr Hase bestreitet dies auf das heftigste.

Wo liegt der Zielort, und wem der beiden können wir Glauben schenken, wenn wir unterstellen, dass Herr Igel am Morgen gleich die richtige Richtung eingeschlagen hat?

Hinweis: Geometrische Reihe im Komplexen

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 24.05.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 31.05.2022, in den Übungen