Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
24.05.2022
Blatt 07

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 25 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k+4}}$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4k}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3+i)^{k+1}}{5^k}$

Aufgabe 26 (4 Punkte)

(a) Die Folge $(f_n)_n$ der *Fibonacci-Zahlen* ist durch
$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \ (n \geq 1)$$
rekursiv definiert. Berechnen Sie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}},$$
indem Sie die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k f_{k+2}}$ als Teleskopsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1}$ mit geeigneten a_k darstellen.

(b) In ähnlicher Weise berechne man $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+4}$.

Aufgabe 27 (4 Punkte) Betrachten Sie für zwei gegebene Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgenden beiden Reihen (A) und (B).
$$\text{(A)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \text{(B)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist (A) konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist auch (B) konvergent.

(b) Ist (A) konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert auch die Reihe (B).

(c) Ist (A) konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, so ist auch (B) konvergent.

(d) Ist (A) absolut konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert auch (B) absolut.

Aufgabe 28 (4 Punkte) Für natürliche Zahlen N sollen die Reihen

$$\sum_N := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k+N)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{k+N}$$

durch Teleskopieren berechnet werden. (Der Fall $N = 1$ ist aus der Vorlesung bekannt.) Bringen Sie dazu die Differenzen

$$\frac{(k-1)!}{(k-1+N)!} - \frac{k!}{(k+N)!}$$

auf einen gemeinsamen Nenner.

Berechnen Sie in ähnlicher Weise für $N \geq 0$ die Reihen $\sigma_N := \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,N}$, wobei

$$a_{k,N} := \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2(k+N)+1}.$$

Als Ergebnis sollten Sie $\sigma_N = \dfrac{2^{N-1}}{N+1} \dfrac{N!}{(2N+1)!}$ erhalten.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 31.05.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 07.06.2022, in den Übungen