Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
31.05.2022
Blatt 08

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 29 (4 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für $n, N \in \mathbb{N}_0$ gilt die Identität $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N+k}{k} = \binom{N+1+n}{n}$.

(b) Für $N \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist

$$\frac{1}{(1-z)^{N+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n}{n} z^n.$$

Hinweis zu (b): Verwenden Sie das Cauchy-Produkt von Reihen.

Aufgabe 30 (4 Punkte) Es sei $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ der Vektorraum aller komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ sei die Faltung $a * b = ((a * b)_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$(a * b)_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass $* : \ell^1(\mathbb{N}_0) \times \ell^1(\mathbb{N}_0) \to \ell^1(\mathbb{N}_0)$ assoziativ und kommutativ ist. (Welcher Satz aus der Vorlesung ergibt, dass $*$ tatsächlich von $\ell^1(\mathbb{N}_0) \times \ell^1(\mathbb{N}_0)$ nach $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ abbildet?)

(b) Beweisen Sie das Distributivgesetz $(a + b) * c = a * c + b * c$.

(c) Untersuchen Sie, ob in $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ ein Einselement für $*$ existiert. (Testen Sie mit besonders einfachen Folgen!)

Zusatz (ohne Bewertung): Wie würden Sie die algebraische Struktur von $(\ell^1(\mathbb{N}_0), +, *)$ bezeichnen?

Bitte wenden!

Aufgabe 31 (4 Punkte, Binomial Verteilung) Für $p \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei die Folge $p^{(N)} = (p_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$p_n^{(N)} := \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Zeigen Sie, dass $p^{(N)}$ durch N-fache Faltung von $p^{(1)}$ mit sich selbst entsteht, dass also $p^{(2)} = p^{(1)} * p^{(1)}$, $p^{(3)} = p^{(1)} * p^{(1)} * p^{(1)}$ usw., allgemein:

$$p^{(N)} = \underbrace{p^{(1)} * \ldots * p^{(1)}}_{N \text{ Faktoren}}.$$

Aufgabe 32 (4 (+1) Punkte) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für vier der nachstehenden fünf Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $a_n = \binom{n}{3} \dfrac{(2+3i)^n}{2^{2n}}$ (b) $a_n = \dfrac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$ (c) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n - 4[\frac{n}{2}] + 2}{n}$

(d) $a_n = \dfrac{(4+5i)^n}{n^2\, 6^n}$ (e) $a_n = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^n \sqrt[n]{n!}}$

Benennen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie benutzt haben.

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 07.06.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 14.06.2022, in den Übungen