Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
07.06.2022
Blatt 09

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 33 (4 Punkte) Wir betrachten die Funktionen

$$\text{(Cosinus hyperbolicus)}\ \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$

$$\text{(Sinus hyperbolicus)}\ \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen, und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(b) $\sinh(z + w) = \cosh(z)\sinh(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

Aufgabe 34 (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \frac{z^2}{1+|z|}$,

(b) $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > 10^{-10}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \frac{1}{z}$,

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \exp(-|z|)$,

(d) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 35 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $c > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ existieren, so dass für alle $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Beweisen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition, dass f gleichmäßig stetig ist. Als Anwendung zeige man die gleichmäßige Stetigkeit von

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x}.$$

Hinweis: Eine Funktion f mit der oben genannten Eigenschaft heißt Hölder-stetig zum Exponenten α.

Aufgabe 36 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} z^{4n}$

Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten dieser Reihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich in Teil (b) um eine sogenannte „Lückenreihe“ handelt, bei der unendlich viele $a_n = 0$ sind. Hier ist die Eulersche Formel für den Konvergenzradius nicht ohne weiteres anwendbar, auch bei der Formel von Cauchy-Hadamard ist Vorsicht geboten.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 14.06.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 21.06.2022, in den Übungen