

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 37 (4 Punkte) Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(f(x)) = -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Tips: Parität (d.h. gerade oder ungerade), Nullstellen, Zwischenwertsatz)

Aufgabe 38 (4 Punkte)

- (a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a_{\pm} \in \mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.
- (b) Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 39 (4 Punkte) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit Periodenlänge $L > 0$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x + L) = f(x)$.

- (a) Zeigen Sie, dass jede stetige periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.
- (b) Nun sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, periodisch mit $L = 2$, und es gelte $f(0) > f(1)$. Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = f(x^2)$, *nicht* gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 40 (4 Punkte) Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

- (a) Es gelte $f(I) \subset I$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.
- (b) Es gelte $I \subset f(I)$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.

Hinweis: Betrachten Sie für beide Aufgabenteile die Funktion $g(x) = f(x) - x$.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 21.06.2022, 10.25 Uhr

Besprechung: ab Di., 28.06.2022, in den Übungen