Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
21.06.2022
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 41 (4 Punkte)

(a) In der Vorlesung wurde die Darstellung

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ bewiesen. Für $x \in \mathbb{R}$ erhält man hierfür einen einfacheren Beweis, wenn man von der Identität $1 = \ln'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\ln(1+h) - \ln(1))$ ausgeht, darin $h = \frac{x}{n}$ wählt und die Stetigkeit der Exponententialfunktion ausnutzt. Führen Sie die Einzelheiten aus.

(b) Zeigen Sie mit einem ähnlichen Argument wie in Teil (a), dass für $x > 0$ gilt

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} n\big(x^{\frac{1}{n}} - 1\big).$$

Starten Sie dazu mit $1 = \exp(0) = \exp'(0)$.

(c) Verallgemeinern Sie weiter und beweisen Sie, dass

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)}\big(n^{\frac{1}{n}} - 1\big).$$

(d) Folgern Sie aus Teil (c), dass die Folge $a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$ divergiert und für jedes $\alpha \in (0,1)$ die Folge $b_n = n^\alpha(\sqrt[n]{n} - 1)$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte, Leibniz-Regel) Die Funktionen f und g seien n-mal differenzierbar. Durch vollständige Induktion nach n beweise man die Identität

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Orientieren Sie sich dabei am Beweis des binomischen Lehrsatzes. Als Anwendung berechne man $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 43 (4 Punkte) Beweisen Sie (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes oder einer der Folgerungen daraus) für $w > 0$ die Ungleichungen

$$\tanh(w) < w < \sinh(w).$$

Hierbei sind $\sinh(w) = \frac{1}{2}(\exp(w) - \exp(-w))$ und $\tanh(w) = \dfrac{\sinh(w)}{\cosh(w)} = \dfrac{\exp(w) - \exp(-w)}{\exp(w) + \exp(-w)}$ die hyperbolischen Sinus- bzw. Tangensfunktionen. Leiten Sie als Anwendung mit Hilfe der Substitution $w = \ln(\sqrt{\frac{y}{x}})$ für $y > x > 0$ die Ungleichungen zwischen dem geometrischen, logarithmischen und arithmetischen Mittel her, das sind

$$\sqrt{xy} < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{y + x}{2}.$$

Aufgabe 44 (4 Punkte, Regel von de L'Hôpital)

(a) Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n$ sowie $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{\alpha}{1 - x^\alpha} - \frac{\beta}{1 - x^\beta}.$$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 28.06.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 05.07.2022, in den Übungen