Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
28.06.2022
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 45 (4 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = x^2 e^{-x}$. Untersuchen Sie, auf welchen - möglichst großen - Teilintervallen von $\mathbb{R}$ die Funktion f

(a) streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt und
(b) streng konvex bzw. streng konkav ist.

Aufgabe 46 (4(+2) Punkte) Berechnen Sie die Taylorreihe (mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sin^2(x),$$

indem Sie

(a) alle Ableitungen $f^{(n)}(0)$ berechnen und in die Definition der Taylorreihe einsetzen;
(b) das Cauchy-Produkt von Reihen verwenden.

Zusatzfrage und Hinweise: Warum ist a priori klar, dass die Taylorreihe von f gegen f konvergiert? - Durch Koeffizientenvergleich sollten Sie auf die Identität $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$ stoßen. - Es gibt noch eine Abkürzung; wenn Sie diese finden, können Sie zwei Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 47 (4 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = e^{-|x|} \cos(x)$. Bestimmen Sie

(a) das (globale) Maximum von f auf $\mathbb{R}$,
(b) alle lokalen Extremalstellen von f und deren Typ,
(c) das (globale) Minimum von f auf $\mathbb{R}$.

Tip zur Vereinfachung der Rechnung in Teil (b): Finden Sie A und θ, so dass $\cos(x) + \sin(x) = A \sin(x + \theta)$.

Aufgabe 48 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar, aber f' unstetig im Nullpunkt ist.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 05.07.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 12.07.2022, in den Übungen