Exkurs: Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Sind Potenzreihen (genauer: die durch Potenzreihen definierten Funktionen) stetig? Um die Antwort gleich vorwegzunehmen: Ja, im Innern des Konvergenzkreises jedenfalls. Insbesondere sind die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen stetig auf $\mathbb{C}$.

Die allgemeine Aussage für Potenzreihen kann man durch direkte Rechnung verifizieren, vgl. S. 4.8 im online-Manuskript. Eine Alternative besteht im folgenden Argument:

(i) Polynome sind stetig. (s.o.)

(ii) Ist $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ eine Potenzreihe, so handelt es sich um den Grenzwert einer Folge von Polynomen (der Partialsummenfolge nämlich).

Hieraus möchte man auf die Stetigkeit von P schliessen. Das ist problematisch, wie das folgende Beispiel zeigt: Für $n \in \mathbb{N}$

sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = x^n$.

Dann sind alle Funktionen f_n stetig, aber

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{array}\right\} =: f(x),$$

die Grenzfunktion f ist also unstetig in $x_0 = 1$.

Der Ausweg aus dieser mißlichen Situation besteht darin, zwischen <u>punktweiser</u> und <u>gleichmäßiger</u> Konvergenz von Funktionenfolgen zu unterscheiden.

Dazu sei $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen

$$f_n : \mathbb{C} \supset X \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich X.

<u>Def.</u>: Eine Funktionenfolge (f_n) heißt

(1) punktweise konvergent gegen $f : X \to \mathbb{C}$, wenn für alle $x \in X$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;

(2) gleichmäßig konvergent gegen $f : X \to \mathbb{C}$, wenn $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt.

<u>Diskussion</u>:

(1) Alternative Definition der glm. Konvergenz mit Hilfe von ε und $N(\varepsilon)$:

$(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N : \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \; \forall x \in X.$

(2) Für die punktweise Konvergenz ist lediglich gefordert:

$$\forall \varepsilon > 0, x \in X \; \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Hier darf N also auch vom Punkt $x \in X$ abhängen, was bei der glm. Konvergenz nicht zugelassen ist.

Wir sehen:

(3) glm. Konvergenz $\Longrightarrow$ punktweise Konvergenz

(4) Die glm. Konvergenz ist eine <u>echt</u> stärkere Eigenschaft als die punktweise, wie auch das obige Beispiel zeigt. Dafür haben wir:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leq x < 1} x^n = 1,$$

und also ist die Konvergenz nicht glm.

Der für unseren Zweck entscheidende Vorteil der glm. Konvergenz ist, dass hierbei sowohl Stetigkeit wie auch glm. Stetigkeit von der approximierenden Folge auf die Grenzfunktion vererbt wird. Genauer gilt:

Satz E1: Es sei (f_n) eine Folge (gleichmäßig) stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch f (gleichmäßig) stetig.

Bew. (für glm. stetig): Für $x, y \in X$ gilt

$$f(x) - f(y) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y),$$

also mit der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)|$$

$$+ |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| =: I + II + III.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann finden wir wegen der glm. Konvergenz $f_n \to f$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Das ergibt $I < \frac{\varepsilon}{3}$ und $III < \frac{\varepsilon}{3}$. Nun sei ein $n \geq N$ fixiert. Da $f_n : X \to \mathbb{C}$ glm. stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $\forall x, y \in X$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$II = |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zsf.: Ist δ wie oben gewählt, so gilt $\forall x, y \in X$ mit $|x - y| < \delta$, dass $\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Das ist die glm. Stetigkeit von $f : X \to \mathbb{C}$. $\square$

Anwendung:

Nun sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt für jedes $r \in [0,R)$ und für jedes $z \in \overline{K_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$:

$$\left| P(z) - \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| r^k \underset{(N\to\infty)}{\longrightarrow} 0,$$

letzteres, da $r < R$ ist und Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises absolut konvergieren. Es folgt

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{|z| \leq r} \left| P(z) - \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \right| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| r^k = 0,$$

also die glm. Konvergenz von $P(z)$ auf $\overline{K_r(0)}$.

Zusammen mit Satz 3 aus dem vorigen Abschnitt und dem Satz E1 ergibt sich:

Satz E2: Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert P für jedes $r \in [0,R)$ gleichmäßig auf $\overline{K_r(0)}$. Die durch die Potenzreihe definierte Funktion

$$P : K_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \to \mathbb{C}$$

ist für jedes $r \in [0,R)$ glm. stetig auf $\overline{K_r(0)}$ und somit stetig auf $K_R(0)$.

Bsp.: $\exp$, $\cos$, $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig.