Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
21.07.2015

Klausur zu Analysis I

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Zur Konvergenz von Reihen)	6 Punkte
A3 (Grenzwerte)	10 Punkte
A4 (Eine rekursiv definierte Zahlenfolge)	11 Punkte
A5 (Anwendung der Konvergenzkriterien für Reihen)	10 Punkte
A6 (Zur gleichmäßigen Stetigkeit)	7 Punkte
A7 (Extremwertaufgabe)	8 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 62 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 22 Punkten. Viel Erfolg!

x

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig“, "falsch“ oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beschränkte Zahlenfolgen, so gilt

   $$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

   . Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Für nichtleere, beschränkte Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ und $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$ gilt

   $$\sup A \cdot B \leq \sup A \cdot \sup B.$$

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Menge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{q + ir : q, r \in \mathbb{Q}\}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist periodisch.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Eine Folge $(a_n)_n$ komplexer Zahlen ist genau dann eine Nullfolge, wenn gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k| : k \geq n\} = 0.$$

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

x

2. **(3+3 P.)** Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(b_n)_n$ eine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_n$ eine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

x

3. **(2+3+2+3 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2}{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^{3x}-1)$,

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$.

X

4. **(2+6+3 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{4}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

(b) Mit dem Ergebnis aus (a) zeige man, dass $(x_n)_n$ konvergiert. (Tipp: Mittelwertsatz)

(c) Berechnen Sie $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

X

5. **(2+4+4 P.)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz bzw. Divergenz. Begründen Sie Ihre Ergebnisse, und geben Sie dazu insbesondere die von Ihnen benutzten Konvergenzkriterien an.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)}{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$.

X

6. **(3+4 P.)** Untersuchen Sie, ob die Funktionen

   (a) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \ln(x)$

   und

   (b) $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := x \sin(\pi x)$

   gleichmäßig stetig sind.

X

7. **(2+2+2+2 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = 1 - (x^5 + 5x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   (a) Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

   (b) Zeigen Sie, dass f genau drei kritische Stellen besitzt (die mit $x_1 < x_2 < x_3$ bezeichnet seien), und bestimmen Sie diese.

   (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f auf den Intervallen $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ und $[x_3, \infty)$.

   (d) Berechnen Sie $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.