Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
02.10.2015

# 2. Klausur zu Analysis I

**Allgemeine Hinweise:** Als Hilfsmittel ist (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

| | |
|---|---|
| A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen) | 10 Punkte |
| A2 (Zur Konvergenz von Reihen) | 6 Punkte |
| A3 (Grenzwerte) | 10 Punkte |
| A4 (Exponential- und trigonometrische Funktionen) | 9 Punkte |
| A5 (Konvergenz einer Potenzreihe) | 10 Punkte |
| A6 (Rechnen mit komplexen Zahlen) | 8 Punkte |
| A7 (Extremwertaufgabe) | 11 Punkte |

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 64 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 22 Punkten. Viel Erfolg!

X

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Zahlenfolge und $R$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so gilt $R \geq 1$.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist jede Teilfolge einer beschränkten reellen Zahlenfolge konvergent.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Umkehrfunktion einer streng monotonen, gleichmäßig stetigen Funktion ist ebenfalls gleichmäßig stetig.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Unter der Vollständigkeit der reellen Zahlen versteht man, dass jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

X

2. **(3+3 P.)** Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

x

3. **(2+3+2+3 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - x^3}{(x+1)^2}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln(n))$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$.

X

4. **(6+3 P.)** Unter Verwendung der Eulerschen Formel oder der Additionstheoreme beweise man

   (i) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$,

   (ii) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

   Anwendung: Berechnen Sie - ausgehend von $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ - die exakten Werte von $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ und $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

x

5. **(3+2+5 P.)** (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(2n)^{n+1}} z^n.$$

(b) Welche Folgerungen über das Konvergenzverhalten dieser Potenzreihe ergeben sich aus Ihrem Ergebnis? (Diese Frage können Sie auch beantworten, wenn Sie Teil (a) *nicht* gelöst haben.)

(c) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe für $z$ aus dem Rand des Konvergenzkreises.

X

6. **(2+2+4 P.)**

(a) Für die komplexe Zahl $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ bestimme man $\dfrac{1}{z}$ in Polardarstellung und in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Stellen Sie die folgende komplexe Zahl $z$ in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$z = \frac{2i - 1}{1 + 3i}$$

(c) Geben Sie (ohne Beweis) alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -1$ an.

X

7. **(3+4+4 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^{x} + 1$.

   (a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen dieser Funktion.

   (b) In welchen Fällen handelt es sich um lokale Maximalstellen bzw. Minimalstellen? Sind diese isoliert?

   (c) Bestimmen Sie $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ sowie $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und untersuchen Sie, ob $f$ ein globales Maximum bzw. ein globales Minimum annimmt.