Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
27.09.2016

2. Klausur zu Analysis I

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Extremwertaufgabe)	6 Punkte
A3 (Grenzwerte)	9 Punkte
A4 (Eine rekursiv definierte Zahlenfolge)	9 Punkte
A5 (Anwendung der Konvergenzkriterien für Reihen)	15 Punkte
A6 (Mittelwertsatz mit Anwendungen)	16 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 65 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

x

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abzählbarer Bildmenge $f(\mathbb{R})$ ist konstant.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so liegt zwischen zwei Nullstellen von f stets eine Nullstelle von f'.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum, so ist f in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = 0$.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

x

2. **(6 P.)** Für $x > 0$ sei $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{8}{x}$. Zeigen Sie, dass f ein isoliertes globales Minimum annimmt, und berechnen Sie dessen Lage und Wert.

X

3. **(2+2+2+3 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^3+3n)^3-n^9}{n^7}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(4x)}{\sin(x^2)}$.

X

4. **(6+3 P.)** Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{1+x_n^2}$. Untersuchen Sie, ob diese Folge konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

X

5. **(4+6+5 P.)** Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren. Begründen Sie Ihre Ergebnisse, und geben Sie dazu insbesondere die von Ihnen benutzten Konvergenzkriterien an.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} z^n,$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}.$

X

6. **(2+3+2+2+5+2 P.)** Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) genau an.

Nun sei $\varepsilon \in (0,1)$ und, für $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^\varepsilon \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{\varepsilon}{k})$. Zeigen Sie:

(a) $(n+1)^\varepsilon - n^\varepsilon > \varepsilon(n+1)^{\varepsilon-1}$,

(b) $(a_n)_n$ ist streng monoton wachsend,

(c) für alle $x \in (-1,0)$ ist $\ln(1+x) \leq x$,

(d) $\ln(a_n) \leq 0$,

und folgern Sie,

(e) dass $(a_n)_n$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n \in [1-\varepsilon, 1]$.

x