

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

In den nachstehenden Aufgaben 5 und 6 seien M eine Menge mit m und N eine Menge mit n Elementen.

5. (4 Punkte) Bestimmen Sie

- (a) die Anzahl aller Abbildungen von M nach N ,
- (b) im Fall $m = n$ die Anzahl aller bijektiven Abbildungen $f : M \rightarrow N$,
- (c) im Fall $m \leq n$ die Anzahl aller injektiven Abbildungen $f : M \rightarrow N$.

Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und beweisen Sie diese!

6. (4 Punkte) Es sei $A_{m,n}$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N .

- (a) Begründen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A_{m,k} = n^m.$$

- (b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\sum_{l=k}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} \binom{l}{k} = \delta_{n,k},$$

wobei $\delta_{n,k}$ das sogenannte Kronecker-Delta bezeichnet, das die Werte 1 für $n = k$ und 0 für $n \neq k$ annimmt.

- (c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass

$$A_{m,n} = \sum_{l=1}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} l^m.$$

Bitte wenden!

7. (4 Punkte) Für natürliche Zahlen n und p sei $s_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$. Zeigen Sie durch Induktion über n und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Pascal'sche Identität

$$\sum_{p=0}^q \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n+1)^{q+1} - 1.$$

Folgern Sie, dass $s_n(4) = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

Hinweis: Verwenden Sie für die Folgerung die Ergebnisse aus Aufgabe 2 von Blatt 0 (Präsenzaufgaben).

8. (4 Punkte) Unter Verwendung der Identität

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

zeige man für $k, m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$(a) \quad \sum_{l=0}^k \binom{n+l}{l} = \binom{n+k+1}{k}, \quad (b) \quad \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \binom{m}{k-l} = \binom{n+m}{k}.$$

(Was ergibt sich in (b) für $k = m = n$?)

Abgabe: Di., 05.05.2026, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 13.05.2026 (Die Übungen am Do., den 14.05.2026, fallen aufgrund des Feiertags aus. Als Ersatz wird Blatt 2 zusätzlich im Tutorium am Freitag, den 15.05.2026, besprochen.)