HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
APL. PROF. DR. AXEL GRÜNROCK
DR. JOSEPH ADAMS
JAKOB NOWICKI-KOTH M.SC.

17	18	19	20	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 5

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 17 (4 Punkte) Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \;\; n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Ist (x_n) monoton (fallend oder wachsend)?

Hinweis: Zum Nachweis, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, können Sie Satz 2 aus Abschnitt 2.4 der Vorlesung und die anschließende Bemerkung benutzen.

Aufgabe 18 (4 Punkte) Es seien $p \geq 2$ eine natürliche und $a > 0$ sowie $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Für $n \geq 2$ sei x_n rekursiv definiert durch

$$x_n := \frac{1}{p}\left((p-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{p-1}}\right).$$

Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass $x_n > 0$ gilt, sowie

(a) $x_n = x_{n-1}\left(1 + \frac{1}{p}(\frac{a}{x_{n-1}^p} - 1)\right)$,

(b) $x_n^p \geq a$,

(c) $(x_{n+1} - x_n)x_n^{p-1} \leq 0$.

Folgern Sie, dass (x_n) gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^p = a$ konvergiert.

Hinweis zu (b): Bernoullische Ungleichung

Aufgabe 19 (4 Punkte) Für festes $k \in \mathbb{N}$ zeige man, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, wobei

(a) $a_n = \dfrac{k^n}{n!}$ (b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$.

Verwenden Sie das "Sandwich-Theorem".

Aufgabe 20 (4 Punkte) Es seien $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge nichtnegativer reeller Zahlen, $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $a_n := \max\{x_k : 1 \leq k \leq n\}$. Zeigen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n x_k^n\right)^{\frac{1}{n}} = S$.

Für (b) verwende man das "Sandwich-Theorem".

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 26.05.2026, 10.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 03.06.2026, in den Übungen (Die Übungen am Do., den 04.06.2026, fallen aufgrund des Feiertags aus. Als Ersatz wird Blatt 5 zusätzlich im Tutorium am Freitag, den 05.06.2026, besprochen.)