

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 6

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 21 (4 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n^* = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge (e_n^*) streng monoton fallend ist.

Aufgabe 22 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Ergebnisse:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$, $p \in \mathbb{N}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}^+$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p}$, $p \in \mathbb{N}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$

Hinweis zu (d): "Sandwich-Theorem"

Aufgabe 23 (4 Punkte) Die b -adische Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k}, \quad a_k \in \{0, \dots, b-1\}$$

einer reellen Zahl $x \in [0, 1]$ heißt *periodisch*, falls $k_0 \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $a_{k+l} = a_k$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall x rational ist.

Anleitung: Mit Hilfe der geometrischen Reihe zeige man die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{b^l}{b^l - 1} \sum_{k=k_0}^{k_0+l-1} \frac{a_k}{b^k}.$$

Aufgabe 24 (4 Punkte) Herr Hase ist ein begeisterter Jogger. Eines Morgens macht er sich auf und läuft zunächst 16 Kilometer nach Osten. Dann biegt er nach Norden ab und legt 8 Kilometer zurück, um anschließend 4 Kilometer in westlicher Richtung zu laufen. Es folgen 2 Kilometer nach Süden, ein Kilometer nach Osten usw..

Sein Bekannter, Herr Igel, ist weniger sportbegeistert und wandert lieber gemächlichen Schrittes, mitunter auch querfeldein. Dementsprechend ist er auch nur halb so schnell unterwegs wie Herr Hase. Er macht sich exakt zur selben Zeit und vom selben Ort auf und geht - ungefähr - in ost-nord-östlicher Richtung, ohne auch nur einmal diese Richtung zu ändern. Nach ihrer Rückkehr am Abend behauptet Herr Igel, er habe Herrn Hase an seinem Zielort bereits erwartet, als dieser dort eingelaufen sei, und das, obwohl er selbst, auf dem Weg dorthin, sich noch eine kurze Pause gönnt habe. Herr Hase bestreitet dies auf das heftigste.

Wo liegt der Zielort, und wem der beiden können wir Glauben schenken, wenn wir unterstellen, dass Herr Igel am Morgen gleich die richtige Richtung eingeschlagen hat?

Hinweis: Geometrische Reihe im Komplexen

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 02.06.2026, 10.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 10.06.2026, und am Do., 11.06.2026, in den Übungen