

**ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I**  
**BLATT 7**

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ..... MatrNr: ..... .....

**Aufgabe 25 (4 Punkte)**

(a) Es sei  $(a_n)$  eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen, für die die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert. Zeigen

Sie, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ .

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  für  $a_n = \frac{1}{n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$  divergiert. (Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ ?)

Hinweis zu (a): Cauchy-Kriterium für Reihen

Hinweis zu (b): Verdichtungssatz

**Aufgabe 26 (4 Punkte)** (a) Die Folge  $(f_n)_n$  der *Fibonacci-Zahlen* ist durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

rekursiv definiert. Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}},$$

indem Sie die Partialsummen  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f_k f_{k+2}}$  als Teleskopsummen  $\sum_{k=1}^n a_k - a_{k+1}$  mit geeigneten  $a_k$  darstellen.

(b) In ähnlicher Weise berechne man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}.$$

**Aufgabe 27 (4 (+1) Punkte)** Untersuchen Sie die Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  für vier der nachstehenden fünf Folgen  $(a_n)$  auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

- (a)  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$       (b)  $a_n = \frac{(1+i)^n}{n^2}$       (c)  $a_n = \frac{i^{(n^2)}}{n}$   
 (d)  $a_n = \frac{(3+4i)^n}{5^n \sqrt[99]{n}}$       (e)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

Benennen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie benutzt haben.

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

**Aufgabe 28 (4 Punkte)** Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe und  $(b_n)$  eine beschränkte Folge, so ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  konvergent.
- (b) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent und  $(b_n)$  eine Nullfolge, so konvergiert auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ .
- (c) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent und  $(b_n)$  eine konvergente Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$ , so ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  konvergent.
- (d) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent und  $(b_n)$  beschränkt, so konvergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  absolut.

**Abgabe:** in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 09.06.2026, 10.25 Uhr  
**Besprechung:** am Mi., 17.06.2026, und am Do., 18.06.2026, in den Übungen