Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Joseph Adams
Jakob Nowicki-Koth M.Sc.

29	30	31	32	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 8

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 29 (4 (+1) Punkte) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für vier der nachstehenden fünf Folgen (a_n) auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $a_n = \binom{n}{3}\dfrac{(2+3i)^n}{2^{2n}}$ (b) $a_n = \dfrac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$ (c) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n - 4[\frac{n}{2}] + 2}{n}$

(d) $a_n = \dfrac{(4+5i)^n}{n^2\, 6^n}$ (e) $a_n = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^n \sqrt[n]{n!}}$

Benennen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie benutzt haben.

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

Aufgabe 30 (4 Punkte) Es sei $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ der Vektorraum aller komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ sei die Faltung $a * b = ((a*b)_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$(a*b)_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass $* : \ell^1(\mathbb{N}_0) \times \ell^1(\mathbb{N}_0) \to \ell^1(\mathbb{N}_0)$ assoziativ und kommutativ ist. (Welcher Satz aus der Vorlesung ergibt, dass $*$ tatsächlich von $\ell^1(\mathbb{N}_0) \times \ell^1(\mathbb{N}_0)$ nach $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ abbildet?)

(b) Beweisen Sie das Distributivgesetz $(a+b)*c = a*c + b*c$.

(c) Untersuchen Sie, ob in $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ ein Einselement für $*$ existiert. (Testen Sie mit besonders einfachen Folgen!)

Zusatz (ohne Bewertung): Wie würden Sie die algebraische Struktur von $(\ell^1(\mathbb{N}_0), +, *)$ bezeichnen?

Aufgabe 31 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n,$$

wobei die f_n die Fibonacci-Zahlen sind (vgl. Aufgabe 26). Leiten Sie dazu eine Rekursion für $x_n := \frac{f_n}{f_{n+1}}$ her und verwenden Sie Aufgabe 17 sowie die Eulersche Formel für den Konvergenzradius. Zeigen Sie ferner, dass für $|z| < R$ die Identität

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 32 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} z^{4n}$

Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten dieser Reihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich in Teil (b) um eine sogenannte "Lückenreihe" handelt, bei der unendlich viele $a_n = 0$ sind. Hier ist die Eulersche Formel für den Konvergenzradius nicht ohne weiteres anwendbar, auch bei der Formel von Cauchy-Hadamard ist Vorsicht geboten.

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 16.06.2026, 10.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 24.06.2026, und am Do., 25.06.2026, in den Übungen