Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Joseph Adams
Jakob Nowicki-Koth M.Sc.

33	34	35	36	Σ

Übungen zur Analysis I
Blatt 9

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 33 (4 Punkte) Verifizieren Sie die folgenden Reihendarstellungen:

(a) $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)!} = e$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$, (c) $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{1}{e}$.

(Für die Teile (a) und (c) fasse man jeweils zwei aufeinanderfolgende Summanden in der Exponentialreihe zusammen, bei (b) handelt es sich um eine Teleskopreihe.) Für die Reihe in (a) zeige man auch die Restgliedabschätzung

$$e = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{(2k-1)!} + r_{2N} \qquad \text{mit} \qquad 0 < r_{2N} \le \frac{2}{(2N)!}.$$

Für welches N ergibt sich $2,71\overline{6} < e \le 2,719\overline{4}$?

Aufgabe 34 (4 Punkte) Die Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)},$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)},$$

sind definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$
$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen, und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(b) $\sinh(z+w) = \cosh(z)\sinh(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

Aufgabe 35 (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \frac{z^2}{1+|z|}$,

(b) $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > 10^{-10}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \frac{1}{z}$,

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \exp(-|z|)$,

(d) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 36 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass reelle Zahlen $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$ existieren, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|f(z)| \leq \alpha |z| + \beta \, .$$

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 23.06.2026, 10.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 01.07.2026, und am Do., 02.07.2026, in den Übungen