

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I  
BLATT 10

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ..... MatrNr: ..... .....

**Aufgabe 37 (4 Punkte)** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *periodisch* mit Periodenlänge  $L > 0$ , falls für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x + L) = f(x)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass jede stetige periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gleichmäßig stetig ist.
- (b) Nun sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, periodisch mit  $L = 2$ , und es gelte  $f(0) > f(1)$ . Zeigen Sie, dass  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $g(x) = f(x^2)$ , *nicht* gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 38 (4 Punkte)** Bestimmen Sie durch elementare Umformungen der Gleichung  $f(x) = y$  die Umkehrfunktionen der nachstehenden Bijektionen:

- (a)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \mapsto f(x) := \sqrt{1 - x^2}$ ,
- (b)  $f : [1, \infty) \rightarrow (0, \frac{1}{2}]$ ,  $x \mapsto f(x) := \frac{x}{1 + x^2}$ ,
- (c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow (2, 4)$ ,  $x \mapsto f(x) := \frac{2 + 4e^{3x}}{1 + e^{3x}}$ ,
- (d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) := \sinh(x)$ .

(Hierbei sind die Definitions- und Zielbereiche bereits so gewählt, dass die angegebenen Funktionen invertierbar sind.) In den Aufgabenteilen (c) und (d) benötigen Sie den natürlichen Logarithmus  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  als Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion. In (b) und (d) ist es u. a. erforderlich, eine quadratische Gleichung zu lösen.

**Aufgabe 39 (4 Punkte)** Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:

- (a) Jedes Polynom der Gestalt

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  hat eine reelle Nullstelle, wenn  $n$  ungerade ist.

- (b) Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  besitzt einen Fixpunkt (d. i. eine Lösung der Gleichung  $f(x) = x$ ).

**Aufgabe 40 (4 Punkte)** Es sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der (sogenannten Cauchy'schen) Funktionalgleichung

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

Zeigen Sie:

- (a) Für  $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  ist  $g(q) = g(1)q$ .
- (b)  $g$  ist ungerade, d. h. es gilt  $g(-x) = -g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c) Ist  $g$  stetig in einem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so ist  $g$  überall stetig.
- (d) In diesem Fall ist  $g(x) = g(1)x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Anmerkung: Dass es auch nirgends stetige Lösungen der Cauchy'schen Funktionalgleichung gibt, wurde 1905 von Georg Hamel gezeigt (Mathematische Annalen, Band 60 (1905), S. 459 ff.). Um solche zu konstruieren, fasst er die reellen Zahlen als einen unendlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{Q}$  auf und beweist die Existenz einer Basis dieses Vektorraums (im Sinne der linearen Algebra). Aus diesem Grund werden Basen unendlich-dimensionaler Vektorräume mitunter auch als "Hamel-Basen" bezeichnet.

**Abgabe:** in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 30.06.2026, 10.25 Uhr  
**Besprechung:** am Mi., 08.07.2026, und am Do., 09.07.2026, in den Übungen