

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I BLATT 11

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 41 (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ differenzierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung $f'(0)$. (Sollten Sie zu dem Schluss kommen, dass die Ableitung nicht existiert, so ist dies zu zeigen.)

(a) $f(x) = (x + |x|)\sqrt{|x|}$,

(b) $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x^2})$,

(c) $f(x) = |x|^{|x|}$, (wobei $f(0) = 0^0 = 1$ ist),

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & : \text{ für } x > 0 \\ 0 & : \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$.

Aufgabe 42 (4 Punkte) Die Funktionen f und g seien n -mal differenzierbar. Durch vollständige Induktion nach n beweise man die Identität

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Orientieren Sie sich dabei am Beweis des binomischen Lehrsatzes. Als Anwendung berechne man $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

(a) In der Vorlesung wurde die Darstellung

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ bewiesen. Für $x \in \mathbb{R}$ erhält man hierfür einen einfacheren Beweis, wenn man von der Identität $1 = \ln'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\ln(1+h) - \ln(1))$ ausgeht, darin $h = \frac{x}{n}$ wählt und die Stetigkeit der Exponentialfunktion ausnutzt. Führen Sie die Einzelheiten aus.

(b) Zeigen Sie mit einem ähnlichen Argument wie in Teil (a), dass für $x > 0$ gilt

$$\ln(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Starten Sie dazu mit $1 = \exp(0) = \exp'(0)$.

Aufgabe 44 (4 Punkte) Beweisen Sie (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes oder einer der Folgerungen daraus) für $w > 0$ die Ungleichungen

$$\tanh(w) < w < \sinh(w).$$

Hierbei sind $\sinh(w) = \frac{1}{2}(\exp(w) - \exp(-w))$ und $\tanh(w) = \frac{\sinh(w)}{\cosh(w)} = \frac{\exp(w) - \exp(-w)}{\exp(w) + \exp(-w)}$ die hyperbolischen Sinus- bzw. Tangensfunktionen. Leiten Sie als Anwendung mit Hilfe der Substitution $w = \ln(\sqrt{\frac{y}{x}})$ für $y > x > 0$ die Ungleichungen zwischen dem geometrischen, logarithmischen und arithmetischen Mittel her, das sind

$$\sqrt{xy} < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{y + x}{2}.$$