

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I BLATT 12

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 45 (4 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = x^2 e^{-x}$. Untersuchen Sie, auf welchen - möglichst großen - Teilintervallen von $\mathbb{R}$ die Funktion f

- (a) streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt und
- (b) streng konvex bzw. streng konkav ist.

Aufgabe 46 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} - \sin^2(x).$$

Besitzt f globale Extrema?

Aufgabe 47 (4 Punkte, Regel von de l'Hospital)

- (a) Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ $n+1$ -mal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n$ sowie $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

- (b) Mit Hilfe von (a) bestimme man für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq \beta$ den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha}{1 - x^\alpha} - \frac{\beta}{1 - x^\beta}.$$

Aufgabe 48 (4 Punkte) Berechnen Sie die Taylorreihe (mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sin^2(x),$$

indem Sie

- (a) alle Ableitungen $f^{(n)}(0)$ berechnen und in die Definition der Taylorreihe einsetzen;
- (b) das Cauchy-Produkt von Reihen verwenden.

Hinweis und Zusatzfrage: Durch Koeffizientenvergleich sollten Sie auf die Identität $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$ stoßen.

- Warum ist a priori klar, dass die Taylorreihe von f gegen f konvergiert?

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 14.07.2026, 10.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 22.07.2026, und am Do., 23.07.2026, in den Übungen