Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Joseph Adams
Jakob Nowicki-Koth M.Sc.

SoSe 2026
29./30.04.2026
Blatt 0

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

1. Man berechne $1+3$, $1+3+5$ und $1+3+5+7$, leite eine allgemeine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$$

her und beweise diese durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Zusatz zu Teil (a): Wie groß ist die Anzahl *aller* Quadrate auf einem Schachbrett?

Optional: Falls die ersten beiden Aufgaben ganz schnell erledigt werden, sonst als Anregung zum Selbststudium:

3. Für natürliche Zahlen n und p sei $s_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$. Durch Aufspalten von $s_{2n}(p)$ in Beiträge von geraden und ungeraden Indices zeige man die Identität

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^p = s_{2n}(p) - 2^p s_n(p).$$

Was ergibt sich hieraus für $p=2$, wenn Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2 (a) verwenden?

Abgabe: Keine Abgabe, wird in den Übungen bearbeitet

Besprechung: Mi., 29.04.2026 und Do., 30.04.2026