

Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

5.3 Konvexe Funktionen

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (\text{K})$$

f heißt *streng konvex*, wenn (K) mit strikter Ungleichung “ $<$ ” gilt;
 f heißt (streng) *konkav*, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Geometrische Interpretation

Die Begriffe “konvex” und “konkav” charakterisieren das Krümmungsverhalten des Graphen G_f . Man sagt, G_f sei nach links (rechts) gekrümmt, wenn f konvex (konkav) ist. Bei dieser Sprechweise wird unterstellt, das G_f in Richtung wachsenden Arguments x durchlaufen wird. Die Menge

$$S_{x,y} := \{(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

ist die Sekante zu G_f durch die Punkte $x, f(x)$ und $(y, f(y))$. Die Ungleichung (K) in der Definition von “konvex” bedeutet geometrisch also die Forderung, dass *alle* Sekanten durch G_f oberhalb dieses Graphen verlaufen. Entsprechend liegen alle Sekanten durch den Graphen einer konkaven Funktion f unterhalb von G_f .

Eine äquivalente Charakterisierung

Um die Eigenschaften konvexer Funktionen zu diskutieren, schreiben wir die Ungleichung (K) etwas um:

Lemma 1: Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist (streng) konvex genau dann, wenn für alle $x < z < y \in I$ gilt

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \quad (1)$$

In diesem Fall ist

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \quad (2)$$

Wie regulär sind konvexe Funktionen?

Zwei Beispiele:

$$(1) \quad f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 & : |x| < 1 \\ 2 & : |x| = 1 \end{cases}$$

ist streng konvex, in $(-1, 1)$ stetig, aber in den Randpunkten $x = \pm 1$ unstetig.

(2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := |x|$ ist konvex, aber in $x = 0$ nicht differenzierbar. Dort existieren aber immerhin die einseitigen Ableitungen

$$D_+ f(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} (f(h) - f(0)) = 1$$

und

$$D_- f(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{1}{h} (f(h) - f(0)) = -1$$

Damit ist der Rahmen des Möglichen bereits einigermaßen abgesteckt.

Satz 1 (über die Regularität konvexer Funktionen):

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gelten:

Satz 1 (über die Regularität konvexer Funktionen):

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gelten:

(1) f ist stetig.

Satz 1 (über die Regularität konvexer Funktionen):

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gelten:

- (1) f ist stetig.
- (2) In jedem $x \in (a, b)$ existieren die einseitigen Ableitungen

$$D_+ f(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

und

$$D_- f(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) .$$

Satz 1 (über die Regularität konvexer Funktionen):

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gelten:

- (1) f ist stetig.
- (2) In jedem $x \in (a, b)$ existieren die einseitigen Ableitungen

$$D_+ f(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

und

$$D_- f(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) .$$

- (3) Für alle $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$ ist

$$D_- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D_- f(y) \leq D_+ f(y).$$

Falls f streng konvex ist, gilt $D_+ f(x) < D_- f(y)$.

Folgerungen:

Folgerungen:

- (1) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (streng) konvex, so ist $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (streng) monoton steigend.

Folgerungen:

- (1) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (streng) konvex, so ist $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (streng) monoton steigend.
- (2) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konkav, so ist f stetig und in jedem $x \in (a, b)$ existieren die einseitigen Ableitungen $D_+ f(x)$ und $D_- f(x)$.

Folgerungen:

- (1) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (streng) konvex, so ist $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (streng) monoton steigend.
- (2) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konkav, so ist f stetig und in jedem $x \in (a, b)$ existieren die einseitigen Ableitungen $D_+ f(x)$ und $D_- f(x)$.
- (3) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (streng) konkav, so ist $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (streng) monoton fallend.

Folgerungen:

- (1) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (streng) konvex, so ist $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (streng) monoton steigend.
- (2) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konkav, so ist f stetig und in jedem $x \in (a, b)$ existieren die einseitigen Ableitungen $D_+ f(x)$ und $D_- f(x)$.
- (3) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (streng) konkav, so ist $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (streng) monoton fallend.

In (1) und (3) gelten auch die Umkehrungen, was wir zusammenfassen zu:

Lemma 2:

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.
Dann gelten:

Lemma 2:

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann gelten:

- (1) f ist genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton steigend ist.

Lemma 2:

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann gelten:

- (1) f ist genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton steigend ist.
- (2) f ist genau dann (streng) konkav, wenn f' (streng) monoton fällt.

Lemma 2:

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann gelten:

- (1) f ist genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton steigend ist.
- (2) f ist genau dann (streng) konkav, wenn f' (streng) monoton fällt.

In Verbindung mit dem Monotoniesatz - angewendet auf f' - ergibt sich hieraus der folgende:

Konvexitätssatz

Satz 2: Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

Konvexitätssatz

Satz 2: Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

- (1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,

Konvexitätssatz

Satz 2: Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

- (1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,
- (2) f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,

Konvexitätssatz

Satz 2: Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

- (1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,
- (2) f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,
- (3) f ist konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,

Konvexitätssatz

Satz 2: Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

- (1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,
- (2) f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,
- (3) f ist konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$,
- (4) f ist streng konkav, wenn $f''(x) < 0$ ist für alle $x \in (a, b)$.

Gegenbeispiel zu $\nRightarrow$ in (2): $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$. f ist auf $\mathbb{R}$ streng konvex, aber $f''(0) = 0$.

Anwendung: Youngsche Ungleichung

Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal differenzierbar mit $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ und also streng konvex auf $\mathbb{R}$. Daraus ergibt sich ein kurzer Beweis der häufig benutzten Youngschen Ungleichung:

Lemma 3: Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \geq 0$ gilt:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Beweis: Klar, wenn $ab = 0$. Sonst setzen wir $x = \ln(a)$ und $y = \ln(b)$. Dann ist $ab = e^x e^y = e^{x+y} = \dots$

$$\dots = \exp\left(\frac{1}{p}px + \frac{1}{q}qy\right) \leq \frac{1}{p}e^{px} + \frac{1}{q}e^{qy} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$