Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

9	10	11	12	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 3

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 9 (4 Punkte) Die Eulersche Beta-Funktion wird definiert durch das (ggf. uneigentliche) Integral

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie:

(a) $B(x,y)$ konvergiert für alle positiven reellen Zahlen x und y.

(b) $B(x,y)$ divergiert, falls $x \leq 0$ oder $y \leq 0$.

Aufgabe 10 (4 Punkte) Zeigen Sie für die in Aufgabe 9 definierte Beta-Funktion, reelle Zahlen x, y und eine natürliche Zahl n die Identitäten

(a) $B(x,y) = B(y,x)$ (b) $B(x,n) = \dfrac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}$ (c) $B(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\,\mathrm{d}s$

Hinweis zu (c): substituieren Sie $s = \frac{t}{1-t}$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ und $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$ Normen auf $\mathbb{K}^n$ definiert werden.

(b) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{K}^n$ und $p, q \in [1,\infty)$ mit $p \leq q$ die Ungleichungen $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q$.

Aufgabe 12 (4 Punkte) Aus der Vorlesung kennen wir die sogenannten p-Normen $\|\cdot\|_p$ auch auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen.

(a) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Vektorraum $C([0,1])$ nicht äquivalent sind.

(b) Es seien $p, q \in [1,\infty]$ unterschiedlich. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ auf dem Folgenraum ℓ^1 nicht äquivalent sind.

Hinweis: Um notatorischen Aufwand zu sparen verwendet man bei Intervallen für Hölder-Exponenten manchmal auch “im unendlichen abgeschlossene” Intervalle, wie z.B. $p \in [1,\infty]$. Die bedeutet lediglich, dass $p \in [1,\infty)$ oder $p = \infty$ gilt, also die Norm $\|\cdot\|_p$ (für $p \in [1,\infty)$) bzw. $\|\cdot\|_\infty$ (für $p = \infty$) gemeint ist.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 30.04.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 08.05.2024 in der Übung