Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

21	22	23	24	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 6

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 21 (2+2 Punkte) Es sei $p \in [1, \infty]$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitskugeln in $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ bzw. $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt sind.

(b) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lipschitz-stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, deren Lipschitz-Konstanten alle kleiner gleich einem festen $L > 0$ sind. Zeigen Sie: Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent, so konvergiert die Folge bereits gleichmäßig.

Aufgabe 22 (2+2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch mit $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$.

(b) Verifizieren Sie die Darstellung $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$.

Aufgabe 23 (1+2+1 Punkte) Ausgehend vom Ergebnis in Teil (b) der Aufgabe 22

(a) berechne man die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

(b) leite für $0 \le x \le \pi$ durch gliedweise Integration die Darstellungen

$$\frac{x}{2}(\pi - x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^4}$$

her und

(c) berechne die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Hinweis: Begründen Sie in (b) weshalb die gliedweise Integration zulässig ist.

Aufgabe 24 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π - periodisch und stetig. Für die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}(k)$ von f gelte $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k\hat{f}(k)| < \infty$. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und dass gilt

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 21.05.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 29.05.2024 in der Übung