HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
PROF. DR. AXEL GRÜNROCK
JOSEPH ADAMS M.SC.

25	26	27	28	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 7

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 25 (4 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 4y_1(x) - 3y_2(x) \qquad & y_1(0) = -1, \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) - y_2(x) \qquad & y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 26 (2+2 Punkte) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Die bereits in Aufgabe 14 eingeführte Abstandsfunktion lässt sich wie folgt verallgemeinern: Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $K \subset X$ und $A \subset X$ ist

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf \{\operatorname{dist}(x, A) \mid x \in K\} = \inf \{d(x, y) \mid x \in K, y \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie: Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, so gilt $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.
(b) Stimmt die Aussage in (a), wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird? Begründen Sie.

Aufgabe 27 (2+2 Punkte) Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei ihre Minkowski-Summe definiert durch

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.
(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

Aufgabe 28 (4 Punkte) Für partiell differenzierbare Vektorfelder $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega' \to \mathbb{R}^3$ definiert man die Divergenz von G bzw. die Rotation von F durch

$$\begin{aligned} \operatorname{div} G &= \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial G_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial x_i}, \\ \operatorname{rot} F &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist F zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$.
(b) Ist $\phi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist $\operatorname{rot} \nabla \phi = (0, 0, 0)$.

Kann es eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ geben, so dass $\nabla \phi(x) = (x^2 - yz, y^2 - xz, -xy)$? Falls ja, bestimmen Sie eine solche. Gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld F mit $\operatorname{rot} F = x$?

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 28.05.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 05.06.2024 in den Übungen