Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

37	38	39	40	Σ

Übungen zur Analysis II
Blatt 10

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 37 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion (vgl. Bsp.2 in Abschnitt 2.4 der Vorlesung)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) = e^x(\cos(y), \sin(y)).$$

(a) Zu $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ finde man möglichst große Umgebungen U von (x_0, y_0) und V von $f(x_0, y_0)$, so dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ explizit an.
(b) Dieselbe Aufgabenstellung wie in (a), jedoch mit $(x_0, y_0) = (0, \pi)$.

Hinweis: Lesen Sie ggf. den Satz 1 in Abschnitt 4.3 der Vorlesung zur Analysis I nach.

Aufgabe 38 (4 Punkte, Beispiel von Peano) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

(a) Berechnen Sie $\nabla P(x, y)$ und zeigen Sie, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von P ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix von P im Punkt $(0, 0)$ positiv semidefinit ist und dass in $(0, 0)$ kein lokales Extremum vorliegt.
(c) Zeigen Sie, dass für jedes $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ die Funktion $\phi_\xi : t \mapsto P(t\xi_1, t\xi_2)$ in 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 39 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Abstand des Ellipsoids

$$E = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + 4c^2 = 16\right\} \quad \text{von der Fläche} \quad F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 16\right\}.$$

Aufgabe 40 (4 Punkte) Es sei $y : (0, \sqrt{2}) \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$, eine differenzierbare Funktion, die der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ für

$$F(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

genügt. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion y, und entscheiden Sie, in welchen Fällen es sich um ein Maximum beziehungsweise ein Minimum handelt.

Hinweise:

- Es gibt genau zwei solche Funktionen.
- Aus der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ berechne man zunächst mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $y'(x)$, ohne explizit nach y aufzulösen!

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 18.06.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 26.06.2024 in den Übungen