HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
PROF. DR. AXEL GRÜNROCK
JOSEPH ADAMS M.SC.

41	42	43	44	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 11

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 41 (4 Punkte, Eulersche Homogenitätsrelation) Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t > 0$: $f(tx) = t^\alpha f(x)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x)$.

Aufgabe 42 (4 Punkte) Eine verschärfte Version des Banachschen Fixpunktsatzes lautet: Es sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f\colon X \to X$ sei eine Abbildung, so dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert womit f^n eine Kontraktion ist. Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt.

Zeigen Sie diese Variante des Banachschen Fixpunktsatzes und geben Sie einen Raum (X, d) sowie eine Abbildung $f\colon X \to X$, die keine Kontraktion ist, aber die Voraussetzungen der obigen Variante erfüllt sind.

Hinweis: Mit f^n ist die n-te Iterierte der Abbildung f bezeichnet, also $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ usw.

Aufgabe 43 (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob das das nichtlineare Gleichungssystem

$$x = \exp\left(\frac{1}{2}(\sin(y) - 1)\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$$

eine eindeutige Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese.

Aufgabe 44 (4 Punkte) Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sich global umkehrbar?

(b) Finden Sie eine affin-lineare Abbildung, die die lokale Umkehrung f^{-1} in der Nähe von $f(1, -1)$ approximiert.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 25.06.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 03.07.2024 in den Übungen