

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 13

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 49 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $y : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, für die der Mittelwert auf jedem Intervall $[0, x]$ mit $\sqrt{y(x)}$ übereinstimmt.

Aufgabe 50 (4 Punkte) Gegeben sei das inhomogene Differenzialgleichungssystem $y' = Py + Q$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} 2x & \cos(x) \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q(x) = \begin{pmatrix} x \\ e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie dasjenige Lösungsfundamentalsystem Y von $y' = Py$, für das $Y(0) = E_2$ gilt. (E_2 bezeichne hierbei die 2×2 -Einheitsmatrix.)
- (b) Berechnen Sie diejenige Lösung des inhomogenen Systems $y' = Py + Q$, die der Anfangsbedingung $y_p(0) = (0, 0)^T$ genügt.

Aufgabe 51 (4 Punkte) Betrachten Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = 6y' - 9y + e^{3x}.$$

- (a) Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (b) Berechnen Sie die Wronski-Determinante.
- (c) Geben Sie die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Differentialgleichung an.

Aufgabe 52 (4 Punkte) Wir betrachten eine zu der Funktion $f : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{falls } 0 \leq y \leq \frac{x^2}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{5}{x}(y - \frac{x^2}{2}) & \text{falls } \frac{x^2}{2} < y < x^2, \\ 3x & \text{falls } x^2 \leq y \end{cases}$$

gehörige Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$ und $y(0) = 0$.

- (a) Skizzieren Sie für ein $x > 0$ schematisch die Funktion $y \mapsto f(x, y)$.
- (b) Verifizieren Sie, dass sowohl $\phi_1(x) = \frac{x^2}{4}$ als auch $\phi_2(x) = \frac{3x^2}{2}$ die obige Anfangswertaufgabe lösen.
- (c) Beweisen Sie, dass die Funktion f die folgende Lipschitz-Bedingung erfüllt

$$\forall x \in [0, \infty) \exists L \geq 0 \forall y, z \in [0, \infty) : |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|.$$

Was hat diese Aufgabe mit dem Satz von Picard-Lindelöf zu tun?