Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

1. Metrische Räume und normierte Vektorräume

Jetzt erst beginnen wir mit der eigentlichen Vorlesung zur Analysis II. Wir starten mit der Einführung einer sehr einfachen Struktur bestehend aus einer Menge X und einer symmetrischen Abstandsfunktion

$$d : X \times X \to [0, \infty),$$

der sogenannten Metrik. Diese einfache Struktur ist bereits ausreichend, um die wichtigen analytischen Konzepte wie Konvergenz, Cauchy-Eigenschaft, Vollständigkeit und Stetigkeit zu verallgemeinern.

1.1 Definitionen und Beispiele

Definition: Gegeben sei eine Menge X. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

1.1 Definitionen und Beispiele

Definition: Gegeben sei eine Menge X. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(M1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (Definitheit),

1.1 Definitionen und Beispiele

Definition: Gegeben sei eine Menge X. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(M1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (Definitheit),

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

1.1 Definitionen und Beispiele

Definition: Gegeben sei eine Menge X. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(M1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (Definitheit),

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d heißt ein *metrischer Raum*.

1.1 Definitionen und Beispiele

Definition: Gegeben sei eine Menge X. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(M1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (Definitheit),

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d heißt ein *metrischer Raum*.

Bemerkung: Für jede Metrik gilt $d(x, y) \geq 0$, denn für alle $x, y \in X$ ist

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Beispiele

(1) Bekannt sind: $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{C}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$. Das ist die übliche und uns bereits vertraute Betrachtungsweise. Man kann auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ aber auch auf viele andere Weisen mit einer Metrik ausstatten:

Beispiele

(1) Bekannt sind: $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{C}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$. Das ist die übliche und uns bereits vertraute Betrachtungsweise. Man kann auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ aber auch auf viele andere Weisen mit einer Metrik ausstatten:

(2) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($\mathbb{K}$ wird im Folgenden häufig so benutzt) und $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ injektiv. Dann wird durch

$$d_f(x, y) := |f(x) - f(y)|$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}$ definiert. (Überprüfen Sie die Eigenschaften (M1) bis (M3). Aus welchem Grund muss man die Injektivität von f voraussetzen? Wenn Sie auf Probleme stoßen, hilft ein Blick ins Skript.)

Mehr Beispiele

(3) Sei $X \neq \emptyset$ eine ansonsten beliebige Menge und

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & : \quad x = y \\ 1 & : \quad x \neq y \end{cases} .$$

Dann ist d eine Metrik auf X, die sogenannte *"triviale Metrik"*.

Mehr Beispiele

(3) Sei $X \neq \emptyset$ eine ansonsten beliebige Menge und

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & : \quad x = y \\ 1 & : \quad x \neq y \end{cases} .$$

Dann ist d eine Metrik auf X, die sogenannte *"triviale Metrik"*.

(4) Der metrische Teilraum: Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$, so wird durch $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer (Teil-)Raum erklärt. Hierbei ist $d|_{Y \times Y}$ die Einschränkung der Abbildung d auf $Y \times Y$. Üblicherweise schreibt man (Y, d) anstelle von $(Y, d|_{Y \times Y})$, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind.

Normen auf Vektorräumen

Der Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ ist ein Spezialfall einer allgemeineren Struktur, die Metriken induziert.

Definition: Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung

$$\| \quad \| : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit den Eigenschaften

(1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit),

Normen auf Vektorräumen

Der Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ ist ein Spezialfall einer allgemeineren Struktur, die Metriken induziert.

Definition: Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung

$$\| \quad \| : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit den Eigenschaften

(1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit),

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (Homogenität),

Normen auf Vektorräumen

Der Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ ist ein Spezialfall einer allgemeineren Struktur, die Metriken induziert.

Definition: Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung

$$\| \quad \| : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit den Eigenschaften

(1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit),

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ für alle $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (Homogenität),

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Normen auf Vektorräumen

Der Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ ist ein Spezialfall einer allgemeineren Struktur, die Metriken induziert.

Definition: Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung

$$\|\quad\| : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit den Eigenschaften

(1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit),

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (Homogenität),

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

eine *Norm* auf X. Ein Paar $(X, \|\quad\|)$ heißt ein *normierter Vektorraum*.

Den Zusammenhang zur Metrik stellt der folgende Satz her:

Satz 1

Ist $(X, \| \quad \|)$ ein normierter Vektorraum und

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) := \|x - y\|,$$

so ist (X, d) ein metrischer Raum, insbesondere gilt $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$.

Der Beweis besteht im Nachweis der Eigenschaften (M1) bis (M3) für die oben mit Hilfe der Norm definierte Abbildung d. Hierfür stehen die Normeigenschaften zur Verfügung. Versuchen Sie es zuerst selbst, wenn es nicht gelingen sollte, finden Sie den Beweis im Skript.

Satz 1

Ist $(X, \|\ \ \|)$ ein normierter Vektorraum und

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) := \|x - y\|,$$

so ist (X, d) ein metrischer Raum, insbesondere gilt $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$.

Der Beweis besteht im Nachweis der Eigenschaften (M1) bis (M3) für die oben mit Hilfe der Norm definierte Abbildung d. Hierfür stehen die Normeigenschaften zur Verfügung. Versuchen Sie es zuerst selbst, wenn es nicht gelingen sollte, finden Sie den Beweis im Skript.

Bemerkung: Die “Umkehrung” von Satz 1 gilt nicht, selbst wenn ein Vektorraum X zugrunde liegt. Ein Beispiel ist die Trivialmetrik: Setzt man hierfür $\|x\| := d(x, 0)$ (alles andere macht wegen (N1) keinen Sinn), so ist die Forderung (N2) nicht erfüllt. Also: Nicht jede Metrik auf einem Vektorraum stammt von einer Norm ab.

Beispiele für normierte Vektorräume

(1) Euklidische und unitäre Vektorräume

Der $\mathbb{K}$ - Vektorraum X sei mit einem Skalarprodukt

$$\langle \quad , \quad \rangle : \quad X \times X \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

versehen, das heißt es gelte für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Beispiele für normierte Vektorräume

(1) Euklidische und unitäre Vektorräume

Der $\mathbb{K}$ - Vektorraum X sei mit einem Skalarprodukt

$$\langle \quad , \quad \rangle : \quad X \times X \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

versehen, das heißt es gelte für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(S1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
(Linearität in der ersten Komponente),

Beispiele für normierte Vektorräume

(1) Euklidische und unitäre Vektorräume

Der $\mathbb{K}$ - Vektorraum X sei mit einem Skalarprodukt

$$\langle \quad , \quad \rangle : \quad X \times X \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

versehen, das heißt es gelte für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(S1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
(Linearität in der ersten Komponente),

(S2) $\langle x, y \rangle = \underline{\langle y, x \rangle}$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (euklidisch) bzw.
$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (unitär),

Beispiele für normierte Vektorräume

(1) Euklidische und unitäre Vektorräume

Der $\mathbb{K}$ - Vektorraum X sei mit einem Skalarprodukt

$$\langle \quad , \quad \rangle : \quad X \times X \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

versehen, das heißt es gelte für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(S1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
(Linearität in der ersten Komponente),

(S2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (euklidisch) bzw.
$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (unitär),

(S3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ mit "="genau dann, wenn $x = 0$.

Dann wird durch $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ eine Norm auf X definiert.

Der Nachweis von (N1) und (N2) ist straight forward - versuchen Sie es selbst! Dabei sollten Sie überlegen, welche Eigenschaften eines Skalarproduktes Sie für welche Normeigenschaften benötigen. Auch der Nachweis von (N3) ist nicht schwierig (auch dies sei als Aufgabe zur Übung gestellt, gegebenenfalls hilft ein Blick ins Skript), wenn man die wichtige *Ungleichung von Cauchy und Schwarz* zur Verfügung hat:

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Proposition: Es seien $(X, \langle \quad , \quad \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum (also ein $\mathbb{K}$ - Vektorraum mit einem Skalarprodukt) und $x, y \in X$. Dann gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Vermutlich ist Ihnen diese Ungleichung samt ihrem Beweis bereits aus der linearen Algebra bekannt. Falls nicht (oder falls Sie ihn vergessen haben sollten), ist er im Skript nachzulesen.

Spezialfälle euklidischer bzw. unitärer Vektorräume

(1.1) Der $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ wird durch $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{k=1}^{n} x_i y_i$ zu einem euklidischen Vektorraum mit der Norm

$$|x| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Spezialfälle euklidischer bzw. unitärer Vektorräume

(1.1) Der $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ wird durch $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$ zu einem euklidischen Vektorraum mit der Norm

$$|x| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.2) $\mathbb{C}^n := \{z = (z_1, ..., z_n) : z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\}$ erhält durch $\langle z, w\rangle := \sum_{k=1}^{n} z_i \overline{w}_i$ ein Skalarprodukt und wird dadurch zu einem unitären Vektorraum mit Norm

$$|z| := \langle z, z\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Weitere Spezialfälle euklidischer/unitärer Vektorräume:

(1.3) Der Folgenraum $\ell_2(\mathbb{N}) := \{z = (z_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty\}$ mit $\langle z, w \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w}_n$ und $\|z\| := \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}$ ist unitär und daher normiert.

Weitere Spezialfälle euklidischer/unitärer Vektorräume:

(1.3) Der Folgenraum $\ell_2(\mathbb{N}) := \{z = (z_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty\}$ mit $\langle z, w\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w}_n$ und $\|z\| := \langle z, z\rangle^{\frac{1}{2}}$ ist unitär und daher normiert.

(1.4) Der Funktionenraum $C([a, b], \mathbb{C})$ aller auf $[a, b]$ stetigen komplexwertigen Funktionen wird durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$$

zu einem unitären Verktorraum mit der Norm

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zusatz zu (1.4)

Die formal identische Bilinearform

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$$

ist ebenfalls wohldefiniert für Funktionen $f, g \in R([a, b], \mathbb{C})$, dem Vektorraum der auf $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$. In diesem Fall erhalten wir jedoch nur ein sogenanntes Halb- (oder Semi-)skalarprodukt, denn z.B. für Funktionen f, die nur für endlich viele $x \in [a, b]$ von Null verschieden sind, gilt $\langle f, f \rangle = 0$, obwohl f nicht die Nullfunktion ist. Bildet man in dieser Situation $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$, so erhält man entsprechend nur eine Halbnorm anstelle einer Norm.

(2) p - Normen ($1 \leq p \leq \infty$)

(2.1) Für $x \in \mathbb{K}^n$ definiert man

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

falls $1 \leq p < \infty$ ist, und

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Für $p = 2$ stimmt dies mit der oben eingeführten euklidischen Norm überein: Es ist $\|x\|_2 = |x|$. Nahezu offensichtlich sind die Normeigenschaften (N1) und (N2), nicht trivial hingegen ist der ...

Beweis der Dreiecksungleichung für $1 < p < \infty$

Zu deren Beweis benötigen wir die (im Folgenden noch zu zeigende) Hölder'sche Ungleichung: Für $1 < p, p' < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$. Damit haben wir:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big).
\end{aligned}
$$

Beweis der Dreiecksungleichung (Fortsetzung)

Hier wurde beim ersten "$\leq$" die Dreiecksungleichung in $\mathbb{K}$ und beim zweiten "$\leq$" die Höldersche Ungleichung benutzt. Nun ist der erste Faktor nichts anderes als $\|x+y\|_p^{\frac{p}{p'}}$. (Warum?) Teilen wir hierdurch, ergibt sich gerade die Behauptung, sofern $\|x+y\|_p \neq 0$ ist. Der Fall $\|x+y\|_p = 0$ ist trivial. $\square$

Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ werden wir in der Übung diskutieren.

Beweis der Hölderschen Ungleichung: Vorbemerkung

Der Beweis der Hölderschen Ungleichung beruht wiederum auf der Ungleichung von W.H.Young: Für $x, y \geq 0$ und $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ gilt

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p'}}{p'}$$

Diese Ungleichung hatten wir in Abschnitt 5.2 der Analysis I als Folgerung aus der Konvexität der Exponentialfunktion erhalten. Man kann sie auch zeigen, indem man eine Extremwertaufgabe löst. Dieser zweite Weg ist im Skript ausgeführt.

Beweis der Hölderschen Ungleichung

Zu zeigen ist: $\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$.

Diese Ungleichung ist offensichtlich richtig, wenn $\|x\|_p = 0$ oder $\|y\|_{p'} = 0$. Daher können wir (wie im Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung) annehmen, dass $\|x\|_p = \|y\|_{p'} = 1$. (Klar?) In diesem Fall erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|y_k|^{p'}}{p'} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Weitere Beispiele zu p-Normen

(2.2) Die Folgenräume $\ell_p(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_n : \|x\|_p < \infty\}$.
Die Normen $\| \quad \|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ sind ähnlich wie in (2.1) gegeben durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

falls $1 \leq p < \infty$ ist, und

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \geq 1} |x_k|.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung benutzt man die ebenfalls gültige Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

der Hölderschen Ungleichung.

Weitere Beispiele zu p-Normen

(2.3) Auch auf $C([a,b],\mathbb{C}) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig } \}$ werden durch

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty) \qquad \text{und}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad (\text{„Supremumsnorm“, Wichtig!})$$

Normen definiert. Legt man für $\| \quad \|_p$ den Raum $R([a,b],\mathbb{C})$ aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ zugrunde, erhält man für $p < \infty$ wiederum nur eine Halbnorm (warum?). $\| \quad \|_\infty$ liefert sogar auf dem Raum der lediglich beschränkten Funktionen eine Norm.

(3) Norm einer beschränkten linearen Abbildung

Gegeben seien normierte Vektorräume $(X, \|\ \ \|_X)$ und $(Y, \|\ \ \|_Y)$ sowie eine lineare Abbildung $A : X \to Y$.

Definition: A heißt *beschränkt*, falls ein $C \geq 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Es gilt: Die beschränkten linearen Abbildungen $A : X \to Y$ bilden einen Vektorraum $L(X, Y)$, der durch (die sogenannte *Operatornorm*)

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\}$$

normiert wird.

Da $L(X, Y)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}(X, Y)$ (dem Vektorraum *aller* linearen Abbildungen von X nach Y) ist, besteht der Beweis dieser Beh. darin, die Eigenschaften (N1) bis (N3) zu überprüfen. Versuchen Sie es selbst. Ggf. finden Sie Hilfe im Skript!

Verständnisfragen

Die folgenden Fragen sollten Sie nach der Lektüre beantworten können. Falls nicht, sollten Sie noch einmal genauer nachlesen.

(1) Ist ein Skalarprodukt linear in der 2. Komponente? (Vorsicht: Diese Frage ist nicht nur mit ja oder nein zu beantworten.)

(2) Wie sehen die "Einheitskreise" $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$ aus? Fertigen Sie eine (oder drei) Skizze(n) an.

(3) Handelt es sich bei den folgenden Abbildungen $\|\quad\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um Normen?
(a) $\|x\| = |x_1| + \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, (b) $\|x\| = |x_1| + |x_2|^2 + |x_3|^3$,
(c) $\|x\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_3^2}$.

Weiterführende Fragestellungen und Anregungen

Wir haben gesehen, dass jede Norm eine Metrik induziert, aber umgekehrt nicht jede Metrik von einer Norm abstammen muss, auch wenn die zugrunde liegende Menge ein Vektorraum ist. Weiter haben wir erfahren, dass jedes Skalarprodukt eine Norm induziert (durch die Festlegung $\|x\| := < x, x >^{\frac{1}{2}}$). Stellt sich die

Frage: Stammt jede Norm von einem Skalarprodukt ab? Speziell: Gibt es z. B. ein Skalarprodukt $(\quad,\quad)$ auf dem $\mathbb{R}^n$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_p = \sqrt{(x, x)}$?

Weiterführende Fragestellungen und Anregungen

Wir haben gesehen, dass jede Norm eine Metrik induziert, aber umgekehrt nicht jede Metrik von einer Norm abstammen muss, auch wenn die zugrunde liegende Menge ein Vektorraum ist. Weiter haben wir erfahren, dass jedes Skalarprodukt eine Norm induziert (durch die Festlegung $\|x\| :=< x, x >^{\frac{1}{2}}$). Stellt sich die

Frage: Stammt jede Norm von einem Skalarprodukt ab? Speziell: Gibt es z. B. ein Skalarprodukt $(\quad , \quad)$ auf dem $\mathbb{R}^n$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_p = \sqrt{(x, x)}$?

Mit dem richtigen Zugang ist diese Frage erstaunlich leicht zu beantworten:

Weiterführende Fragestellungen und Anregungen

Dabei beschränken wir uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und stellen fest, dass jede Norm des Typs $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ der sogenannten Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

genügt. Verifizieren Sie diese Identität. Anschließend läßt sich die spezielle (und damit auch die allgemeine) Fragestellung oben mit einem einfachen Beispiel erledigen.