Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

1.2 Offene und abgeschlossene Mengen (Topologie metrischer Räume)

Definition: In einem metrischen Raum (X, d) heißt

$$B_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

die *offene Kugel* vom Radius $r > 0$ um $a \in X$.

Beispiel: Die Einheitskreise $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Metriken $d_p(x, y) := \|x - y\|_p$ finden Sie für $p \in \{1, 2, \infty\}$ im Skript skizziert.

Definition: In einem metrischen Raum (X, d) heißt $U \subset X$ eine *Umgebung* von $x \in U$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft

In jedem metrischen Raum gilt die folgende - einfache aber wichtige - Trennungseigenschaft:

Satz 1: Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $x, y \in X$ und $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y, so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Zum Beweis wählt man $\varepsilon := \frac{1}{2} d(x, y) > 0$, $U_x = B_\varepsilon(x)$ und $U_y = B_\varepsilon(y)$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung weist man nach, dass U_x und U_y disjunkt sind. Weitere Einzelheiten finden Sie im Skript.

Bemerkung: Wie in der Überschrift wird diese Eigenschaft als Hausdorff'sche Trennungseigenschaft (nach dem bedeutenden Bonner Mathematiker Felix Hausdorff) bezeichnet. Sie ist die Voraussetzung für die Eindeutigkeit des Grenzwerts.

Definitionen: Offen und abgeschlossen

Definition: Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge

(1) $U \subset X$ heißt *offen*, falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$ ist;

Definitionen: Offen und abgeschlossen

Definition: Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge

(1) $U \subset X$ heißt *offen*, falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$ ist;

(2) $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ offen ist.

Bemerkungen:

(1) Eine offene Menge ist eine Umgebung jedes ihrer Elemente.

Bemerkungen:

(1) Eine offene Menge ist eine Umgebung jedes ihrer Elemente.

(2) Es gibt viele Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.

Bemerkungen:

(1) Eine offene Menge ist eine Umgebung jedes ihrer Elemente.

(2) Es gibt viele Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.

(3) $\emptyset$ und X sind sowohl offen, als auch abgeschlossen (denn: $\emptyset^c = X$ und für $U = \emptyset, X$ ist die definierende Eigenschaft von "offen" trivialerweise erfüllt).

Beispiele

(1) Die offene Kugel $B_r(a)$ ist tatsächlich offen.

Beispiele

(1) Die offene Kugel $B_r(a)$ ist tatsächlich offen.

(2) Das Kugeläußere $\{x \in X : d(x,a) > r\}$ ist offen.

Für die Begründungen dieser Aussagen sei auf das Skript verwiesen. Als Folgerung aus dem zweiten Beispiel erhalten wir:

$$\overline{B_r(a)} := \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$$

ist als Komplement des Kugeläußeren abgeschlossen. Wir nennen $\overline{B_r(a)}$ dementsprechend die *abgeschlossene* Kugel vom Radius $r > 0$ um $a \in X$.

Äquivalente Normen

Können verschiedene Metriken dasselbe System offener Mengen erzeugen? Zur Beantwortung dieser Frage führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition: Zwei Normen $\| \quad \|_1$ und $\| \quad \|_2$ auf einem Vektorraum X heißen äquivalent, wenn es Konstanten c und C gibt, so dass für alle $x \in X$

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1.$$

Bemerkung: Auf dem $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent. Für die p-Normen werden wir das in den Übungen besprechen. Den allgemeinen Fall lernt man in der Einführung in die Funktionalanalysis.

Satz 2

Es seien X ein Vektorraum und $d_{1,2}$ Metriken auf X, die von äquivalenten Normen $\| \quad \|_{1,2}$ induziert sind. Dann sind dieselben Mengen offen bezüglich d_1 wie bezüglich d_2.

Für den Beweis sei erneut auf das Skript verwiesen.

Der nächste Satz charakterisiert das System offener Mengen, welches von einer Metrik erzeugt wird:

Satz 3

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $U, V, U_i \subset X$. Dann gelten

Satz 3

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $U, V, U_i \subset X$. Dann gelten

(T1) $\emptyset$ und X sind offen.

Satz 3

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $U, V, U_i \subset X$. Dann gelten

(T1) $\emptyset$ und X sind offen.

(T2) Sind U_i offen für alle i aus einer Indexmenge I, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Satz 3

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $U, V, U_i \subset X$. Dann gelten

(T1) $\emptyset$ und X sind offen.

(T2) Sind U_i offen für alle i aus einer Indexmenge I, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

(T3) Sind U und V offen, so ist auch der Durchschnitt $U \cap V$ offen.

Beweis:

(T1) haben wir uns bereits überlegt.

Beweis:

(T1) haben wir uns bereits überlegt.

(T2) Ist $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so existiert ein Index i_0 derart, dass $x \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also ist diese Vereinigung offen.

Beweis:

(T1) haben wir uns bereits überlegt.

(T2) Ist $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so existiert ein Index i_0 derart, dass $x \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also ist diese Vereinigung offen.

(T3) Ist $x \in U \cap V$, so existieren $\varepsilon_{1,2} > 0$ mit $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ und $B_{\varepsilon_2}(x) \subset V$. Für $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ist dann $B_\varepsilon(x) \subset U \cap V$. Somit ist $U \cap V$ offen. $\square$

Bemerkung und Beispiel

Wiederholte Anwendung von (T3) ergibt, dass endliche Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind. Dies gilt im allgemeinen nicht mehr für unendliche Durchschnitte. Das zeigt das folgende

Beispiel: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$. Dann sind alle U_n offen aber

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$$

ist *nicht* offen.

Der Begriff der Topologie

Mengensysteme, die den Bedingungen (T1) bis (T3) genügen, sind von besonderer Bedeutung. Sie werden als *Topologie* bezeichnet.

Definition: Gegeben sei eine Menge[1] X. Ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Topologie*, wenn gilt

[1] nicht notwendig mit einer Metrik ausgestattet

Der Begriff der Topologie

Mengensysteme, die den Bedingungen (T1) bis (T3) genügen, sind von besonderer Bedeutung. Sie werden als *Topologie* bezeichnet.

Definition: Gegeben sei eine Menge[1] X. Ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Topologie*, wenn gilt

(T1) $\emptyset, X \in \tau$,

[1] nicht notwendig mit einer Metrik ausgestattet

Der Begriff der Topologie

Mengensysteme, die den Bedingungen (T1) bis (T3) genügen, sind von besonderer Bedeutung. Sie werden als *Topologie* bezeichnet.

Definition: Gegeben sei eine Menge[1] X. Ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Topologie*, wenn gilt

(T1) $\emptyset, X \in \tau$,

(T2) Sind $U_i \in \tau$ für alle i aus einer Indexmenge I, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$,

[1] nicht notwendig mit einer Metrik ausgestattet

Der Begriff der Topologie

Mengensysteme, die den Bedingungen (T1) bis (T3) genügen, sind von besonderer Bedeutung. Sie werden als *Topologie* bezeichnet.

Definition: Gegeben sei eine Menge[1] X. Ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Topologie*, wenn gilt

(T1) $\emptyset, X \in \tau$,

(T2) Sind $U_i \in \tau$ für alle i aus einer Indexmenge I, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$,

(T3) Sind $U \in \tau$ und $V \in \tau$, so ist auch der Durchschnitt $U \cap V \in \tau$.

Die Elemente von τ werden als *offene Mengen* bezeichnet. Ihre Komplemente heißen *abgeschlossen*. Ein Paar (X, τ) bestehend aus eine Menge X und eine Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ wird als *topologischer Raum* bezeichnet.

[1] nicht notwendig mit einer Metrik ausgestattet

Einige Topologien auf dem $\mathbb{R}^n$, angeordnet von fein nach grob

(1) τ_1 sei die von der trivialen Metrik (im folgenden d_1 genannt) auf dem $\mathbb{R}^n$ erzeugte Topologie. Dann ist $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$, denn: Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\{x \in \mathbb{R}^n : d_1(x, x_0) < 1\} = \{x_0\}$ eine offene Menge. Nach (T2) ist dann jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Metrik offen. Also ist $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$, wie behauptet. Bemerkenswert ist: Bezüglich dieser Metrik ist *jede* Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

Einige Topologien auf dem $\mathbb{R}^n$, angeordnet von fein nach grob

(2) Die von der Standardmetrik

$$d(x,y) = |x-y| = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

erzeugte Topologie nennen wir τ. Wenn wir - ohne weiteren Zusatz - von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sprechen, meinen wir ihre Elemente. τ ist *gröber* als τ_1, denn es gibt eine Vielzahl von Mengen, z. B. alle endlichen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die nicht in τ liegen.

Einige Topologien auf dem $\mathbb{R}^n$, angeordnet von fein nach grob

(3) $\tau_\infty := \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ ist die gröbste Topologie, die wir auf dem $\mathbb{R}^n$ definieren können. Sie wird *nicht* von einer Metrik erzeugt, da für sie die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft nicht gilt.

Offener Kern, abgeschlossene Hülle und der Rand

Definition: Es sei (X, τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißen

(1) $M^\circ := \bigcup_{\substack{U \subset M \\ U \in \tau}} U$ der *offene Kern* von M. (Hierbei handelt es sich also um die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind.) Die Elemente von M° nennen wir die *inneren Punkte* von M.

Offener Kern, abgeschlossene Hülle und der Rand

Definition: Es sei (X, τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißen

(1) $M^\circ := \bigcup_{\substack{U \subset M \\ U \in \tau}} U$ der *offene Kern* von M. (Hierbei handelt es sich also um die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind.) Die Elemente von M° nennen wir die *inneren Punkte* von M.

(2) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \supset M \\ A^c \in \tau}}$ die *abgeschlossene Hülle* von M. (Das ist also der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M umfassen.)

Offener Kern, abgeschlossene Hülle und der Rand

Definition: Es sei (X, τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißen

(1) $M^\circ := \bigcup_{\substack{U \subset M \\ U \in \tau}} U$ der *offene Kern* von M. (Hierbei handelt es sich also um die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind.) Die Elemente von M° nennen wir die *inneren Punkte* von M.

(2) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \supset M \\ A^c \in \tau}}$ die *abgeschlossene Hülle* von M. (Das ist also der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M umfassen.)

(3) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ den *Rand* von M. Seine Elemente heißen *Randpunkte*.

Bemerkung

Eine typische Aufgabe in diesem Zusammenhang ist die Folgende: Gegeben seien ein topologischer Raum (X, τ) und eine Teilmenge $M \subset X$. Zu bestimmen sind M°, $\overline{M}$ und ∂M. Der folgende Satz gibt hierzu einige Hilfestellungen. Er wird für allgemeine topologische Räume formuliert und bewiesen, auch wenn wir uns in den Anwendungen auf den $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie beschränken.

Satz 4

Es sei (X, τ) ein topologischer Raum mit Teilmengen $M, M_1, M_2 \subset X$. Dann gelten:

(1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^\circ \subset M_2^\circ$ und $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$.

...

Satz 4

Es sei (X, τ) ein topologischer Raum mit Teilmengen $M, M_1, M_2 \subset X$. Dann gelten:

(1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^\circ \subset M_2^\circ$ und $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$.

(2) $(\overline{M})^c = (M^c)^\circ$ und $(M^\circ)^c = \overline{M^c}$.

...

Satz 4

Es sei (X, τ) ein topologischer Raum mit Teilmengen $M, M_1, M_2 \subset X$. Dann gelten:

(1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^\circ \subset M_2^\circ$ und $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$.

(2) $(\overline{M})^c = (M^c)^\circ$ und $(M^\circ)^c = \overline{M^c}$.

(3) M ist offen $\Leftrightarrow M = M^\circ$.

...

Satz 4

Es sei (X, τ) ein topologischer Raum mit Teilmengen $M, M_1, M_2 \subset X$. Dann gelten:

(1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^\circ \subset M_2^\circ$ und $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$.

(2) $(\overline{M})^c = (M^c)^\circ$ und $(M^\circ)^c = \overline{M^c}$.

(3) M ist offen $\Leftrightarrow M = M^\circ$.

(4) M ist abgeschlossen $\Leftrightarrow M = \overline{M}$.

...

Satz 4 (Fortsetzung)

(5) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{M^c} = \partial(M^c)$ und ∂M ist abgeschlossen.

Den etwas umfangreicheren Beweis des Satzes finden Sie im Skript, S. M17, M18.

Satz 4 (Fortsetzung)

(5) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{M^c} = \partial(M^c)$ und ∂M ist abgeschlossen.

(6) $\overline{M} = M \cup \partial M$ und $M^\circ = M \setminus \partial M$.

Den etwas umfangreicheren Beweis des Satzes finden Sie im Skript, S. M17, M18.

Satz 4 (Fortsetzung)

(5) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{M^c} = \partial(M^c)$ und ∂M ist abgeschlossen.

(6) $\overline{M} = M \cup \partial M$ und $M^\circ = M \setminus \partial M$.

(7) $x \in \partial M \Leftrightarrow$ Für jede offene Umgebung V von x ist $V \cap M \neq \emptyset \neq V \cap M^c$ ("Randpunkteigenschaft").

Den etwas umfangreicheren Beweis des Satzes finden Sie im Skript, S. M17, M18.

Zwei Beispiele

(1) Es seien $(X, d) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ und $M = B_1(0)$.
M ist offen, also gilt $M^\circ = M$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$ besitzt die Randpunkteigenschaft, also ist $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \subset \partial M$. Hier gilt sogar Gleichheit, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \neq 1$ ist die Randpunkteigenschaft nicht erfüllt. (Details im Skript!) Satz 4 (6) ergibt nun $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. (Vorsicht! Dies gilt nicht in beliebigen metrischen Räumen, denken Sie z.B. an $\mathbb{R}^n$ mit der Trivialmetrik.)

Zwei Beispiele

(1) Es seien $(X,d) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ und $M = B_1(0)$.
M ist offen, also gilt $M^\circ = M$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$ besitzt die Randpunkteigenschaft, also ist $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \subset \partial M$. Hier gilt sogar Gleichheit, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \neq 1$ ist die Randpunkteigenschaft nicht erfüllt. (Details im Skript!) Satz 4 (6) ergibt nun $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. (Vorsicht! Dies gilt nicht in beliebigen metrischen Räumen, denken Sie z.B. an $\mathbb{R}^n$ mit der Trivialmetrik.)

(2) Es seien $(X,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $M = \mathbb{Q}$.
Hier ist $\partial M = \overline{M} = \mathbb{R}$ (vgl. Skript), Satz 4 (6) ergibt $M^\circ = \emptyset$. $\mathbb{Q}$ besitzt also als Teilmenge von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *keinen inneren Punkt*.

Zwei Beispiele

(1) Es seien $(X, d) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ und $M = B_1(0)$.
M ist offen, also gilt $M^\circ = M$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$ besitzt die Randpunkteigenschaft, also ist $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \subset \partial M$. Hier gilt sogar Gleichheit, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \neq 1$ ist die Randpunkteigenschaft nicht erfüllt. (Details im Skript!) Satz 4 (6) ergibt nun $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. (Vorsicht! Dies gilt nicht in beliebigen metrischen Räumen, denken Sie z.B. an $\mathbb{R}^n$ mit der Trivialmetrik.)

(2) Es seien $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $M = \mathbb{Q}$.
Hier ist $\partial M = \overline{M} = \mathbb{R}$ (vgl. Skript), Satz 4 (6) ergibt $M^\circ = \emptyset$. $\mathbb{Q}$ besitzt also als Teilmenge von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *keinen inneren Punkt*.

In engem Zusammenhang mit dem Beispiel (2) stehen die folgenden Begriffsbildungen:

Dichtheit und Separabilität

Definition: Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes (X, τ) heißt *dicht*, wenn $\overline{M} = X$ gilt.

Definition: Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Richtig oder falsch?

Ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, sollten Sie nach der Lektüre beantworten können. Falls nicht, sollten Sie noch einmal genauer nachlesen.

(1) Genau dann ist eine Teilmenge M eines topologischen Raumes (X, τ) sowohl offen als auch abgeschlossen, wenn sie keinen Randpunkt besitzt.

(2) Die Vereinigung beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist stets abgeschlossen.

(3) $\mathbb{C}$ (versehen mit der Standardmetrik bzw. -topologie) ist separabel.

(4) Für jede Teilmenge M eines topologischen Raumes (X, τ) gilt $M^\circ = \overline{M^c}^c$.

Weiterführende Fragestellungen und Anregungen

(1) Geben Sie Beispiele von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ an, die weder offen noch abgeschlossen sind.

(2) Finden Sie einen metrischen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ (ausgestattet mit der Standardmetrik), der genau vier Teilmengen enthält, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

(3) Geben Sie eine abzählbare dichte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an.

(4) Ist die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen, aufgefasst als Teilmenge des metrischen Raumes $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, abgeschlossen?