Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

1.3 Folgen und Grenzwerte. Stetigkeit

Definition: Eine Folge $(a_n)_n$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt

(1) *konvergent* gegen $a \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon,$$

in diesem Fall heißt a der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_n$;

1.3 Folgen und Grenzwerte. Stetigkeit

Definition: Eine Folge $(a_n)_n$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt

(1) *konvergent* gegen $a \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon,$$

in diesem Fall heißt a der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_n$;

(2) eine *Cauchy-Folge*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Bemerkungen

(1) Gegenüber den Begriffen, die wir in Analysis I kennengelernt haben, gibt es nur unwesentliche Veränderungen. Es ist lediglich $(\mathbb{K}, |\quad|)$ durch (X, d) zu ersetzen.

Bemerkungen

(1) Gegenüber den Begriffen, die wir in Analysis I kennengelernt haben, gibt es nur unwesentliche Veränderungen. Es ist lediglich $(\mathbb{K}, |\quad|)$ durch (X, d) zu ersetzen.

(2) Der Grenzwert in Teil (1) der Definition ist eindeutig bestimmt. (Begründen Sie diese Feststellung!)

Bemerkungen

(1) Gegenüber den Begriffen, die wir in Analysis I kennengelernt haben, gibt es nur unwesentliche Veränderungen. Es ist lediglich $(\mathbb{K}, |\quad|)$ durch (X, d) zu ersetzen.

(2) Der Grenzwert in Teil (1) der Definition ist eindeutig bestimmt. (Begründen Sie diese Feststellung!)

(3) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. (Warum?)

Bemerkungen

(1) Gegenüber den Begriffen, die wir in Analysis I kennengelernt haben, gibt es nur unwesentliche Veränderungen. Es ist lediglich $(\mathbb{K}, |\quad|)$ durch (X, d) zu ersetzen.

(2) Der Grenzwert in Teil (1) der Definition ist eindeutig bestimmt. (Begründen Sie diese Feststellung!)

(3) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. (Warum?)

(4) Bezeichungen: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in (X, d) oder auch $a_n \stackrel{d}{\to} a$ $(n \to \infty)$ für konvergente Folgen. Für Cauchy-Folgen: $\lim_{n,m\to\infty} d(a_n, a_m) = 0$ oder $d(a_n, a_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$.

Definition: Vollständigkeit

Definition: Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert. Ein vollständiger normierter Vektorraum (d. h. vollständig bezüglich der von der Norm induzierten Metrik) heißt ein *Banachraum*.

Bekannt ist: $(\mathbb{K}, |\quad|)$ ist ein Banachraum. In Verallgemeinerung dieser Tatsache soll bewiesen werden, dass auch $(\mathbb{K}^n, \|\quad\|)$ mit einer beliebigen Norm $\|\quad\|$ ein Banachraum ist. Dazu zeigen wir:

Satz 1

(X, d) und (X', d') seien metrische Räume, das kartesische Produkt $X \times X'$ sei versehen mit der Produktmetrik

$$\delta((x, x'), (y, y')) := d(x, y) + d'(x', y').$$

Dann gilt: Eine Folge $((x_n, x_n'))_n$ in $(X \times X', \delta)$ ist genau dann konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge), wenn die Komponentenfolgen $(x_n)_n$ in (X, d) und $(x_n')_n$ in (X', d') konvergent (bzw. Cauchy-Folgen) sind.

Bemerkungen:

Satz 1

(X, d) und (X', d') seien metrische Räume, das kartesische Produkt $X \times X'$ sei versehen mit der Produktmetrik

$$\delta((x, x'), (y, y')) := d(x, y) + d'(x', y').$$

Dann gilt: Eine Folge $((x_n, x_n'))_n$ in $(X \times X', \delta)$ ist genau dann konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge), wenn die Komponentenfolgen $(x_n)_n$ in (X, d) und $(x_n')_n$ in (X', d') konvergent (bzw. Cauchy-Folgen) sind.

Bemerkungen:

(1) δ ist eine Metrik. (Dies sei als Übungsaufgabe gestellt.)

Satz 1

(X, d) und (X', d') seien metrische Räume, das kartesische Produkt $X \times X'$ sei versehen mit der Produktmetrik

$$\delta((x, x'), (y, y')) := d(x, y) + d'(x', y').$$

Dann gilt: Eine Folge $((x_n, x'_n))_n$ in $(X \times X', \delta)$ ist genau dann konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge), wenn die Komponentenfolgen $(x_n)_n$ in (X, d) und $(x'_n)_n$ in (X', d') konvergent (bzw. Cauchy-Folgen) sind.

Bemerkungen:

(1) δ ist eine Metrik. (Dies sei als Übungsaufgabe gestellt.)

(2) Man kann an dieser Stelle auch $\delta((x, x'), (y, y')) := \max(d(x, y) + d'(x', y'))$ oder $\delta((x, x'), (y, y')) := (d(x, y)^2 + d'(x', y')^2)^{\frac{1}{2}}$ verwenden. Letzteres ist besonders dann sinnvoll, wenn d und d' von einem Skalarprodukt abstammen.

Beweis des Satzes für konvergente Folgen.

(1) Es gelte $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0 = \lim_{n\to\infty} d'(x'_n, a')$. Dann ergeben die Rechenregeln für Grenzwerte

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(x_n, a) + \lim_{n\to\infty} d'(x'_n, a') = \lim_{n\to\infty} \delta((x_n, x'_n), (a, a')).$$

$\square$

Beweis des Satzes für konvergente Folgen.

(1) Es gelte $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0 = \lim_{n\to\infty} d'(x'_n, a')$. Dann ergeben die Rechenregeln für Grenzwerte

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(x_n, a) + \lim_{n\to\infty} d'(x'_n, a') = \lim_{n\to\infty} \delta((x_n, x'_n), (a, a')).$$

(2) Wir haben $0 \le d(x_n, a) \le \delta((x_n, x'_n), (a, a'))$, also folgt mit dem Sandwich-Theorem aus

$$\lim_{n\to\infty} \delta((x_n, x'_n), (a, a')) = 0,$$

dass auch $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$. Ebenso sieht man $\lim_{n\to\infty} d'(x'_n, a') = 0$ ein.

$\square$

Folgerungen

(1) $(X \times X', \delta)$ ist vollständig genau dann, wenn (X, d) und (X', d') vollständig sind.

Folgerungen

(1) $(X \times X', \delta)$ ist vollständig genau dann, wenn (X, d) und (X', d') vollständig sind.

(2) Eine Folge $(x_k)_k = ((x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}))_k$ in $(\mathbb{K}^n, \| \quad \|_1)$ ist genau dann konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge), wenn jede Komponentenfolge $(x_k^{(l)})_k$, $1 \leq l \leq n$ konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge) ist. Insbesondere ist $(\mathbb{K}^n, \| \quad \|_1)$ vollständig.

Folgerungen

(1) $(X \times X', \delta)$ ist vollständig genau dann, wenn (X, d) und (X', d') vollständig sind.

(2) Eine Folge $(x_k)_k = ((x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}))_k$ in $(\mathbb{K}^n, \|\ \ \|_1)$ ist genau dann konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge), wenn jede Komponentenfolge $(x_k^{(l)})_k$, $1 \leq l \leq n$ konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge) ist. Insbesondere ist $(\mathbb{K}^n, \|\ \ \|_1)$ vollständig.

(3) $(\mathbb{K}^n, \|\ \ \|)$ mit einer beliebigen Norm ist vollständig, da auf $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind. Insbesondere ist $(\mathbb{K}^n, |\ \ |)$ vollständig. ($|\ \ |$ steht hier für die euklidische Norm.)

Häufungspunkte und isolierte Punkte

Als nächstes sollen die abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raumes durch Folgen charakterisiert werden. Dazu führen wir den Begriff des Häufungspunktes ein:

Definition: Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. $x \in X$ heißt ein *Häufungspunkt* von M, falls eine Folge $(x_k)_k$ in $M \setminus \{x\}$ existiert mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ in (X, d). Die Menge der Häufungspunkte einer Menge M wird mit $\mathcal{H}(M)$ bezeichnet. Ist $y \in M \setminus \mathcal{H}(M)$, so heißt y ein *isolierter Punkt* von M.

Satz 2

Für jede Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) gilt $\overline{M} = M \cup \mathcal{H}(M)$. Insbesondere ist M genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für jede Folge $(x_k)_k$ in M, die in X konvergiert, ist $\lim_{k\to\infty} x_k \in M$.

Für den Beweis sei auf das Skript verwiesen.

Folgerung: Ist (X, d) vollständig und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist der metrische Teilraum (A, d) ebenfalls vollständig.

Der Beweis der Folgerung ist straight forward, versuchen Sie es selbst. Wenn es nicht gelingt, hilft ein Blick ins Skript weiter.

Funktionen zwischen metrischen Räumen

Wir können jetzt den Begriff der Konvergenz einer Funktion zwischen metrischen Räumen in einfacher Weise formulieren:

Definition: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $M \subset X$, $x_0 \in \mathcal{H}(M)$ sowie $f : M \to Y$ eine Abbildung. Dann bedeutet

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y,$$

dass für alle Folgen $(x_k)_k$ in M mit $\lim_{k\to\infty} d_X(x_k, x_0) = 0$ gilt, dass auch $\lim_{k\to\infty} d_Y(f(x_k), y) = 0$.

Bemerkung: Die Existenz einer solchen approximierenden Folge ist durch die Voraussetzung $x_0 \in \mathcal{H}(M)$ gesichert.

Zwischenfrage

Wie ist der Begriff der Konvergenz einer Funktion sinnvollerweise mit Hilfe von ε und δ zu definieren?

Stetigkeit

Definition: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(1) *stetig in* $x_0 \in X$, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, d. h. wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0,$ so dass $\forall x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon;$

Stetigkeit

Definition: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(1) *stetig in* $x_0 \in X$, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, d. h. wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0,$ so dass $\forall x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon;$

(2) *stetig in* X, falls f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist;

Stetigkeit

Definition: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(1) *stetig in* $x_0 \in X$, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, d. h. wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0,$ so dass $\forall x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$;

(2) *stetig in* X, falls f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist;

(3) *gleichmäßig stetig*, falls gilt

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall\, x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta : d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Bemerkung

Gegenüber der Analysis I wurde lediglich $|x - x_0|$ durch $d_X(x, x_0)$ und $|f(x) - f(x_0)|$ durch $d_Y(f(x), f(x_0))$ bzw. im Fall der gleichmäßigen Stetigkeit $|x - x'|$ durch $d_X(x, x')$ und $|f(x) - f(x')|$ durch $d_Y(f(x), f(x'))$ ersetzt. Daher stehen uns auch in diesem allgemeineren Rahmen die Folgenkriterien für die (gleichmäßige) Stetigkeit zur Verfügung. Für die Stetigkeit in einem Punkt $x_0 \in X$ wurde das bereits in die obige Definition integriert. Falls Sie das Folgenkriterium für die gleichmäßige Stetigkeit nicht mehr präsent haben: Lesen Sie es nach und schreiben Sie es unter Verwendung von d_X und d_Y auf.

Hölderstetige Funktionen

Auch diese Funktionenklasse haben wir bereits in der Analysis I kennengelernt. Im allgemeineren Rahmen von Funktionen zwischen metrischen Räumen ist der Begriff in folgender Weise zu verallgemeinern:

Definition: $f : X \to Y$ heißt *Hölderstetig* zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, falls für alle $x, x' \in X$ die Ungleichung

$$d_Y(f(x), f(x'))) \leq L d_X(x, x')^\alpha$$

besteht.

Hölderstetige Funktionen

Auch diese Funktionenklasse haben wir bereits in der Analysis I kennengelernt. Im allgemeineren Rahmen von Funktionen zwischen metrischen Räumen ist der Begriff in folgender Weise zu verallgemeinern:

Definition: $f : X \to Y$ heißt *Hölderstetig* zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, falls für alle $x, x' \in X$ die Ungleichung

$$d_Y(f(x), f(x'))) \leq L d_X(x, x')^\alpha$$

besteht.

Zum *Beweis* der gleichmäßigen Stetigkeit solcher Funktionen sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Sind dann $x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$, so ist

$$d_Y(f(x), f(x'))) \leq L d_X(x, x')^\alpha < L\delta^\alpha = \varepsilon.$$

Spezialfall $\alpha = 1$: Lipschitzstetige Funktionen

Hierzu einige Beispiele. Dabei sei stets $(X, \| \quad \|_X)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum:

(1) $\| \quad \|_X : X \to \mathbb{R},\ x \to \|x\|_X$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$, denn aufgrund der Dreiecksungleichung ist

$$|\|x\|_X - \|x'\|_X| \leq \|x - x'\|_X.$$

Spezialfall $\alpha = 1$: Lipschitzstetige Funktionen

Hierzu einige Beispiele. Dabei sei stets $(X, \| \quad \|_X)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum:

(1) $\| \quad \|_X : X \to \mathbb{R},\ x \to \|x\|_X$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$, denn aufgrund der Dreiecksungleichung ist

$$|\|x\|_X - \|x'\|_X| \leq \|x - x'\|_X.$$

(2) $(Y, \| \quad \|_Y)$ sei ein weiterer normierter Vektorraum und $A \in L(X, Y)$. Dann ist A Lipschitzstetig mit $L = \|A\|$, denn es ist

$$\|Ax - Ax'\|_Y = \|A(x - x')\|_Y \leq \|A\| \|x - x'\|_X.$$

Insbesondere ist also jede beschränkte lineare Abbildung gleichmäßig stetig.

Spezialfall $\alpha = 1$: Lipschitzstetige Funktionen (Fortsetzung)

(3) Wählen wir im vorigen Beispiel $(X, \| \quad \|_X) = (\mathbb{K}^n, | \quad |)$, so ist jede lineare Abbildung $A : X \to Y$ beschränkt und damit nach (2) auch Lipschitz- und gleichmäßig stetig. Hierbei kann die euklidische Norm $| \quad |$ sogar noch durch eine beliebige Norm ersetzt werden. (Für den Beweis dieser Festellungen sei erneut auf das Vorlesungsskript verwiesen.)

Spezialfall $\alpha = 1$: Lipschitzstetige Funktionen (Fortsetzung)

(3) Wählen wir im vorigen Beispiel $(X, \| \quad \|_X) = (\mathbb{K}^n, | \quad |)$, so ist jede lineare Abbildung $A : X \to Y$ beschränkt und damit nach (2) auch Lipschitz- und gleichmäßig stetig. Hierbei kann die euklidische Norm $| \quad |$ sogar noch durch eine beliebige Norm ersetzt werden. (Für den Beweis dieser Festellungen sei erneut auf das Vorlesungsskript verwiesen.)

Nun soll die Stetigkeit weiterer elementarer Funktionenklassen erschlossen werden. Dazu ziehen wir wie in Analysis I zunächst einige ...

Folgerungen aus den Folgenkriterien (I)

(1) (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) seien metrische Räume und $f : Y \to Z$ sowie $g : X \to Y$ seinen (gleichmäßig) stetig. Dann ist auch $f \circ g : X \to Z$ (gleichmäßig) stetig.

Beweis für "gleichmäßig stetig": $d_X(x_n, y_n) \to 0$ impliziert $d_Y(g(x_n), g(y_n)) \to 0$ aufgrund der glm. Stetigkeit von g, was wegen der glm. Stetigkeit von f wiederum $d_Z(f \circ g(x_n), f \circ g(y_n)) \to 0$ nach sich zieht.

Folgerungen aus den Folgenkriterien (II)

(2) Es seien $f, g : (X, d) \to \mathbb{K}$ stetig. Dann gelten:

Folgerungen aus den Folgenkriterien (II)

(2) Es seien $f, g : (X, d) \to \mathbb{K}$ stetig. Dann gelten:

(2.1) $f + g$ und fg sind stetig,

Folgerungen aus den Folgenkriterien (II)

(2) Es seien $f, g : (X, d) \to \mathbb{K}$ stetig. Dann gelten:

(2.1) $f + g$ und fg sind stetig,

(2.2) ist zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ stetig.

Folgerungen aus den Folgenkriterien (II)

(2) Es seien $f, g : (X, d) \to \mathbb{K}$ stetig. Dann gelten:

(2.1) $f + g$ und fg sind stetig,

(2.2) ist zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ stetig.

Bemerkung: Auch wenn f und g gleichmäßig stetig sind, sind fg und $\dfrac{f}{g}$ im Allgemeinen *nicht* gleichmäßig stetig.

Monome und Polynome

(1) Monome in mehreren Variablen, also Abbildungen

$$M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ x = (x_1, ..., x_n) \mapsto M(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} =: x^\alpha$$

mit einem sogenannten Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sind stetig. Dies folgt aus der Stetigkeit der Projektionen $x \to x_i$ als lineare Abbildungen und (2.1) auf der vorigen Folie.

Monome und Polynome

(1) Monome in mehreren Variablen, also Abbildungen

$$M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ x = (x_1, ..., x_n) \mapsto M(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} =: x^\alpha$$

mit einem sogenannten Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sind stetig. Dies folgt aus der Stetigkeit der Projektionen $x \to x_i$ als lineare Abbildungen und (2.1) auf der vorigen Folie.

(2) Polynonome in mehreren Variablen sind Abbildungen

$$P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ x \mapsto P(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j M_j(x)$$

mit Monomen M_j wie in (1) definiert. Sie sind ebenfalls stetig.

Rationale Funktionen

(3) Rationale Funktionen in mehreren Veränderlichen, also

$$R : \mathbb{K}^n \setminus \{x \in K^n : Q(x) = 0\} \to \mathbb{K},\ x \mapsto R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

mit Polynomen P und Q wie in (2) sind gleichfalls stetig.

Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^n$

(4) (X, d) und (Y_1, d_1) sowie (Y_2, d_2) seien metrische Räume und

$$f : X \to Y_1 \times Y_2,\ x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

eine Abbildung. Dann gilt: f ist (gleichmäßig) stetig genau dann, wenn dies für beide Komponentenfunktionen $f_1 : X \to Y_1$ und $f_2 : X \to Y_2$ zutrifft. (Dies ergibt sich aus Satz 1 und den Folgenkriterien.) Insbesondere ist eine Abbildung

$$f : X \to \mathbb{K}^n, x \mapsto f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$$

stetig (bzw. gleichmäßig stetig), wenn alle f_i, $1 \leq i \leq n$, dies sind.

Ein Gegenbeispiel

Bei der Untersuchung der Stetigkeit von Funktionen

$$f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$$

kann man sich also auf die Untersuchung der Komponentenfunktionen f_i beschränken. Eine entsprechende Reduktion für den Definitionsbereich ist nicht möglich, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & : \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dann sind beide sogenannten "Schnittfunktionen"

Ein Gegenbeispiel (Fortsetzung)

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f_x(y) := f(x, y)$$

und

$$f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_y(x) := f(x, y)$$

für jedes feste x bzw. für jedes feste y stetig als rationale Funktionen. Die Funktion f selbst ist hingegen unstetig im Nullpunkt, denn wenn wir $x = y$ wählen, haben wir

$$\lim_{\substack{x=y\to 0\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

Zwei weitere Stetigkeitskriterien

Zum Abschluss des Abschnitts sollen zwei weitere Stetigkeitskriterien formuliert werden:

Satz 4: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gelten:

(1) f ist stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn zu jeder Umgebung $V_{f(x_0)} \subset Y$ von $f(x_0)$ eine Umgebung U_{x_0} von x_0 existiert mit $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$,

Zwei weitere Stetigkeitskriterien

Zum Abschluss des Abschnitts sollen zwei weitere Stetigkeitskriterien formuliert werden:

Satz 4: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gelten:

(1) f ist stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn zu jeder Umgebung $V_{f(x_0)} \subset Y$ von $f(x_0)$ eine Umgebung U_{x_0} von x_0 existiert mit $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$,

(2) f ist stetig in X genau dann, wenn $f^{-1}(V)$ offen ist in (X, d_X) für jede offene Teilmenge V von (Y, d_Y).

Zwei weitere Stetigkeitskriterien

Zum Abschluss des Abschnitts sollen zwei weitere Stetigkeitskriterien formuliert werden:

Satz 4: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gelten:

(1) f ist stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn zu jeder Umgebung $V_{f(x_0)} \subset Y$ von $f(x_0)$ eine Umgebung U_{x_0} von x_0 existiert mit $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$,

(2) f ist stetig in X genau dann, wenn $f^{-1}(V)$ offen ist in (X, d_X) für jede offene Teilmenge V von (Y, d_Y).

Den Beweis des Satzes finden Sie im Skript, S. M32, M33.

Die in Satz 4 genannten Eigenschaften erlauben eine "rein topologische" Definition der Stetigkeit:

Topologische Formulierung des Stetigkeitsbegriffs

Definition: Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f

(1) stetig in $x_0 \in X$, genau dann, wenn für alle Umgebungen[1] $V_{f(x_0)}$ von $f(x_0)$ eine Umgebung U_{x_0} von x_0 existiert, so dass $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$,

[1] In einem topologischen Raum (X, τ) ist eine Umgebung eines Punktes $a \in X$ eine Menge $M \subset X$, zu der eine Menge $U \in \tau$ mit $a \in U \subset M$ existiert.

Topologische Formulierung des Stetigkeitsbegriffs

Definition: Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f

(1) stetig in $x_0 \in X$, genau dann, wenn für alle Umgebungen[1] $V_{f(x_0)}$ von $f(x_0)$ eine Umgebung U_{x_0} von x_0 existiert, so dass $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$,

(2) stetig in X genau dann, wenn für alle $V \in \sigma$ gilt, dass $f^{-1}(V) \in \tau$ ist.

[1] In einem topologischen Raum (X, τ) ist eine Umgebung eines Punktes $a \in X$ eine Menge $M \subset X$, zu der eine Menge $U \in \tau$ mit $a \in U \subset M$ existiert.

Topologische Formulierung des Stetigkeitsbegriffs

Definition: Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f

(1) stetig in $x_0 \in X$, genau dann, wenn für alle Umgebungen[1] $V_{f(x_0)}$ von $f(x_0)$ eine Umgebung U_{x_0} von x_0 existiert, so dass $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$,

(2) stetig in X genau dann, wenn für alle $V \in \sigma$ gilt, dass $f^{-1}(V) \in \tau$ ist.

Bemerkung: Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit lässt sich nicht für lediglich topologische Räume fassen. Man benötigt zusätzliche Strukturelemente.

[1] In einem topologischen Raum (X, τ) ist eine Umgebung eines Punktes $a \in X$ eine Menge $M \subset X$, zu der eine Menge $U \in \tau$ mit $a \in U \subset M$ existiert.

Konkrete Anwendung von Satz 4

Mit Hilfe des Satzes kann oft wesentlich leichter entschieden werden, ob eine Menge offen bzw. abgeschlossen ist, als unter Verwendung der Definition. Dazu zwei Beispiele:

Konkrete Anwendung von Satz 4

Mit Hilfe des Satzes kann oft wesentlich leichter entschieden werden, ob eine Menge offen bzw. abgeschlossen ist, als unter Verwendung der Definition. Dazu zwei Beispiele:

(1) Der Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ist offen, denn mit $P_n(x) = x_n$ gilt $\mathbb{R}^n_+ = P_n^{-1}((0, \infty))$, und P_n ist eine stetige Projektion.

Konkrete Anwendung von Satz 4

Mit Hilfe des Satzes kann oft wesentlich leichter entschieden werden, ob eine Menge offen bzw. abgeschlossen ist, als unter Verwendung der Definition. Dazu zwei Beispiele:

(1) Der Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ist offen, denn mit $P_n(x) = x_n$ gilt $\mathbb{R}^n_+ = P_n^{-1}((0, \infty))$, und P_n ist eine stetige Projektion.

(2) Das “Achsenkreuz” $\{x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^n x_i = 0\}$ ist abgeschlossen, denn es ist $\{x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^n x_i = 0\} = g^{-1}(\{0\})$ für die stetige Abbildung (Monom) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \to g(x) := \prod_{i=1}^n x_i$.

Richtig oder falsch?

Ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, sollten Sie nach der Lektüre beantworten können. Falls nicht, sollten Sie noch einmal genauer nachlesen.

(1) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ ist Hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ genau dann, wenn dies für alle Komponentenfunktionen zutrifft. (Hierbei seien $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Norm ausgestattet.)

(2) Sind (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $M \subset X$ und $f : M \to Y$ eine Funktion sowie $x_0 \in M$ ein isolierter Punkt von M, so ist f stetig in x_0.

(3) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist der Graph $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ (mit Standardmetrik).

Weiterführende Fragestellung

Es sei $f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ eine Funktion; $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ seien mit der euklidischen Norm ausgestattet. Was können Sie über die (Hölder-)Stetigkeit von f aussagen, wenn die Komponentenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ Hölderstetig zu *verschiedenen* Exponenten $\alpha_i \in (0, 1]$ sind? Wird die Sache besser, wenn Sie U als beschränkt voraussetzen?

Tipp: Betrachten Sie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, x \mapsto f(x) := (\sqrt{x}, \sqrt[3]{x})$.

(Scherzfrage am Rande: Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Hölderstetig zu einem Exponenten $\alpha > 1$? Handelt es sich dabei um eine interessante Funktionenklasse?)