Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

1.4 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Hier betrachten wir Folgen $(f_n)_n$ von Funktionen

$$f_n : X \to Y$$

mit einem gemeinsamen Definitionsbereich X und einem gemeinsamen Zielbereich Y. Wir setzen voraus:

1.4 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Hier betrachten wir Folgen $(f_n)_n$ von Funktionen

$$f_n : X \to Y$$

mit einem gemeinsamen Definitionsbereich X und einem gemeinsamen Zielbereich Y. Wir setzen voraus:

(1) (X, d) ist ein metrischer Raum (das ist erforderlich für Stetigkeitsuntersuchungen, typischerweise ist $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der von der euklidischen Norm erzeugten Metrik),

1.4 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Hier betrachten wir Folgen $(f_n)_n$ von Funktionen

$$f_n : X \to Y$$

mit einem gemeinsamen Definitionsbereich X und einem gemeinsamen Zielbereich Y. Wir setzen voraus:

(1) (X, d) ist ein metrischer Raum (das ist erforderlich für Stetigkeitsuntersuchungen, typischerweise ist $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der von der euklidischen Norm erzeugten Metrik),

(2) $(Y, \|\quad\|)$ ist ein normierter $\mathbb{K}$ - Vektorraum (metrisch muss er sein für die Stetigkeit, die Vektorraumstruktur verlangen wir, um auch Reihen von Funktionen untersuchen zu können; der einfachste und häufigste Fall ist $(Y, \|\quad\|) = (\mathbb{K}, |\quad|)$).

Beschränkte Funktionen und Supremumsnorm

Wir definieren den Vektorraum

$$B(X, Y) := \{f : X \to Y : \sup\{\|f(x)\| : x \in X\} < \infty\}$$

aller beschränkten Y-wertigen Funktionen auf X. Diesen versehen wir mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}.$$

Welcher Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen wird hierdurch induziert?

Konvergenz in $\| \quad \|_\infty$

Für $f, f_n \in B(X,Y)$ gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} \quad \text{in} \quad (B(X,Y), \| \quad \|_\infty),$$

Konvergenz in $\| \quad \|_\infty$

Für $f, f_n \in B(X,Y)$ gilt nun

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \quad \text{in} \quad (B(X,Y), \| \quad \|_\infty), \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Konvergenz in $\| \quad \|_\infty$

Für $f, f_n \in B(X, Y)$ gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} \quad \text{in} \quad (B(X,Y), \| \quad \|_\infty),$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} = 0 \tag{2}$$

Konvergenz in $\| \quad \|_\infty$

Für $f, f_n \in B(X, Y)$ gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} \quad \text{in} \quad (B(X,Y), \| \quad \|_\infty),$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \\ \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} < \varepsilon \tag{3}$$

Konvergenz in $\| \quad \|_\infty$

Für $f, f_n \in B(X, Y)$ gilt nun

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \quad \text{in} \quad (B(X,Y), \| \quad \|_\infty), \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 && (1) \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} = 0 && (2) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \\
& \qquad \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} < \varepsilon && (3) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N, x \in X : \\
& \qquad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon && (4)
\end{aligned}
$$

Beachten Sie: In (2) handelt es sich *nicht* um eine Limes superior, sondern um den Limes einer Folge von Suprema.

Gleichmäßige Konvergenz

Wenn wir die Beschränktheitsvoraussetzung an f, f_n fallen lassen und ggf. ∞ als Wert der auftretenden Suprema akzeptieren, bleiben die Äquivalenzen (1) $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ (4) gültig. Damit sind wir beim Begriff der gleichmäßigen Konvergenz:

Definition: Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n : X \to Y$ heißt *gleichmäßig* konvergent gegen $f : X \to Y$, wenn eine der (gleichwertigen) Bedingungen (1) bis (4) erfüllt ist.

Punktweise Konvergenz

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_n$ impliziert insbesondere, dass für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_n$ in $(Y, \| \quad \|)$ gegen $f(x)$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} = 0$$

Punktweise Konvergenz

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_n$ impliziert insbesondere, dass für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_n$ in $(Y, \| \quad \|)$ gegen $f(x)$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

Punktweise Konvergenz

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_n$ impliziert insbesondere, dass für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_n$ in $(Y, \| \quad \|)$ gegen $f(x)$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ in } (Y, \| \quad \|). \tag{5}$$

Punktweise Konvergenz

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_n$ impliziert insbesondere, dass für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_n$ in $(Y, \|\ \ \|)$ gegen $f(x)$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ in } (Y, \|\ \ \|). \tag{5}$$

Definition: Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n : X \to Y$ heißt *punktweise* konvergent gegen $f : X \to Y$, wenn die Bedingung (5) erfüllt ist.

Bemerkung

Eine Folge $(f_n)_n$ wie oben ist punktweise konvergent gegen $f : X \to Y$ genau dann, wenn gilt

$$\forall x \in X,\ \varepsilon > 0\ \exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ :\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Vergleichen Sie dies mit (4). Wo liegt der Unterschied?

Beispiel

Die gleichmäßige Konvergenz ist eine echt stärkere Eigenschaft als die punktweise, wie das folgende Beispiel zeigt: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_n(x) := x^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & x = 1 \\ 0 & : & x \in [0,1) \end{array} \right\} =: f(x).$$

Also gilt: $f_n \to f$ punktweise. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{x^n : x \in [0,1]\} = 1 \neq 0.$$

In diesem Beispiel konvergiert eine Folge stetiger Funktionen gegen eine *unstetige* Grenzfunktion. Das ist bei gleichmäßiger Konvergenz nicht möglich, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1

Es sei sei $(f_n)_n$ eine Folge (gleichmäßig) stetiger Funktionen $f_n : X \to Y$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist auch f (gleichmäßig) stetig.

Beweis (für gleichmäßig stetige Funktionen f_n): Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in X$ ist

$$f(x) - f(y) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y),$$

also mit der Dreiecksungleichung

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + ..$$

$$+\|f_n(y) - f(y)\| =: I + II + III$$

b.w.

Fortsetzung des Beweises:

Ist jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so finden wir aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$

$$I\,,\ III \leq \sup\{\|f_n(z) - f(z)\| : z \in X\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun fixieren wir ein $n \geq N$. Dann ist f_n nach Voraussetzung gleichmäßig stetig, d. h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt

$$II = \|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es folgt: Für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ ist $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, und das ist die gleichmäßige Stetigkeit von f. $\square$

Zwischenfrage

Wie ist der Beweis zu modifizieren, um die zweite Aussage des Satzes - dass aus der Stetigkeit aller f_n in einem Punkt $x_0 \in X$ bei gleichmäßiger Konvergenz die Stetigkeit der Grenzfunktion f in diesem Punkt folgt - zu zeigen?

Folgerung

Es sei $CB(X, Y) := \{f \in B(X, Y) : f \text{ ist stetig } \}$ der Untervektorraum von $B(X, Y) = \{f : X \to Y : \|f\|_\infty < \infty\}$, welcher die stetigen Funktionen enthält. Dann ist $(CB(X, Y), \| \quad \|_\infty)$ abgeschlossen in $(B(X, Y), \| \quad \|_\infty)$.

Das folgt aus Satz 1 und der Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Folgen in Satz 2 in Abschnitt 1.3. Darüber hinaus gilt:

Satz 2

Ist $(Y, \|\ \ \|)$ vollständig, so sind auch $(B(X,Y), \|\ \ \|_\infty)$ und $(CB(X,Y), \|\ \ \|_\infty)$ Banachräume.

Mit der Vorbemerkung folgt die Vollständigkeit von $(CB(X,Y), \|\ \ \|_\infty)$ aus der von $(B(X,Y), \|\ \ \|_\infty)$, denn abgeschlossene Teilräume vollständiger metrischer Räume sind ebenfalls vollständig. Den Beweis der Vollständigkeit von $(B(X,Y), \|\ \ \|_\infty)$ finden Sie im Skript auf S. M40. Der Einstieg ist ganz natürlich: Gegeben sei eine Cauchy-Folge $(f_n)_n$ in $(B(X,Y), \|\ \ \|_\infty)$. Dann ist für jedes $x \in X$ $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $(Y, \|\ \ \|)$, also konvergent. Man setzt $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und hat dann zu zeigen, dass diese Funktion beschränkt ist und dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Funktionenreihen

Für die betrachteten Funktionenreihen haben wir angenommen, dass sie Werte in einem Vektorraum haben. Daher können wir zu einer solchen Funktionenfolge $(f_n)_n$ stets die Partialsummen

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

bilden und die Partialsummenfolge $(s_n)_n$ untersuchen, die hier eine Funktionenfolge ist. Hiermit erklären wir den Begriff der...

Konvergenz einer Funktionenreihe

Definition: Gegeben sei eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n : X \to Y$. Wenn die Partialsummenfolge $(s_n)_n$ in Y punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergiert, nennen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

eine punktweise (bzw. gleichmäßig) *konvergente Funktionenreihe*. Darüber hinaus nennen wir $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *absolut konvergent*, wenn für jedes $x \in X$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\|$ konvergiert.

Bemerkung: Ist Y vollständig, so impliziert die absolute die punktweise Konvergenz. (Warum? Und: Welche Rolle spielt dabei die Vollständigkeit?)

Konvergenzkriterium von Weierstraß

Satz 3: Es sei $(Y, \|\ \ \|)$ vollständig und $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty.$$

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $F \in B(X, Y)$.

Beweis:

Die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$$

zeigt die absolute Konvergenz. Die Partialsummen sind beschränkt, da

$$\|s_n\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty,$$

also gilt $s_n \in B(X, Y)$. Ferner ist wegen

$$\|s_n - s_m\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_\infty \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

$(s_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $B(X, Y)$, also nach Satz 2 konvergent bezüglich $\| \quad \|_\infty$, d. h. gleichmäßig konvergent.

□

Beispiel

Anstelle der sonst üblichen Verständnis- und weiterführenden Fragen möchte ich hier ein einfaches Beispiel zur gleichmäßigen Konvergenz diskutieren, das Ihnen eine Hilfestellung zur Bearbeitung der Aufgabe 17 geben wird. Betrachten wir die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) := e^{-nx^2}.$$

Offenbar sind alle Funktionen f_n stetig. Zuerst fragen wir nach dem punktweisen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für ein beliebiges festes $x \in \mathbb{R}$. Hier ist also der Grenzwert einer reellen Zahlenfolge zu bestimmen. Versuchen Sie es selbst, bevor Sie umblättern!

Punktweiser Grenzwert

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(0) = e^0 = 1$ und daher auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schreiben wir $f_n(x) = \left(e^{-x^2}\right)^n$ und stellen fest, dass $e^{-x^2} \in (0,1)$ gilt. Es handelt sich also um eine geometrische Folge, die gegen Null konvergiert, d. h. für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben wir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Insgesamt: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

Gleichmäßige Konvergenz (I)

Die gerade ermittelte Grenzfunktion ist offenbar unstetig im Nullpunkt, während alle f_n stetig sind. Welche Folgerung bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz ergibt sich aus dieser schlichten Beobachtung? Beachten Sie dabei den Satz 1!

Gleichmäßige Konvergenz (I)

Die gerade ermittelte Grenzfunktion ist offenbar unstetig im Nullpunkt, während alle f_n stetig sind. Welche Folgerung bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz ergibt sich aus dieser schlichten Beobachtung? Beachten Sie dabei den Satz 1!

Nach Satz 1 müsste die Grenzfunktion stetig sein, wenn die Konvergenz gleichmäßig wäre, letzteres kann also hier nicht der Fall sein. Wir sollten aber nicht bei dieser etwas groben (weil auf den gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$ bezogenen) Feststellung stehenbleiben! Präziser ergibt unser Argument: Auf jedem Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$, welches $x_0 = 0$ enthält, ist in unserem Beispiel die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Gleichmäßige Konvergenz (II)

Betrachten wir hingegen Intervalle $J \subset \mathbb{R}$, die $x_0 = 0$ nicht enthalten, so müssen wir auf die Definition zurückgehen, zwei Fälle unterscheiden und ein wenig rechnen:

Fall 1: $J = (0, a)$ (oder $J = (-a, 0)$) mit einem $a > 0$:
Hier ist für ein beliebiges (festes) $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in J} e^{-nx^2} = 1$$

und daher

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0.$$

Die Konvergenz ist auf J also *nicht* gleichmäßig.

Gleichmäßige Konvergenz (III)

Fall 2: $J = [a, \infty)$ (oder $J = (-\infty, -a])$ mit einem $a > 0$:
Hier haben wir

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in J} e^{-nx^2} = e^{-na^2}$$

und also

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} e^{-na^2} = 0.$$

Daher ist die Konvergenz in diesem Fall gleichmäßig.