Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

1.4 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen - Anwendungen

1. Potenzreihen

Hier werden wir in einem ersten Schritt ein Ergebnis aus der Analysis I, nämlich die Stetigkeit von Potenzreihen, auf einem anderen Weg beweisen. Es sei

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert für jedes $r \in (0, R)$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Für ein solches r setzen wir

$$X := X_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} = \overline{B_r(0)},\ Y := \mathbb{C} \text{ und } f_n(z) = a_n z^n.$$

Potenzreihen

Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{|a_n z^n| : |z| \leq r\} = |a_n| r^n$$

und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

Satz 3 ist anwendbar und ergibt

Satz 4

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für jedes $r < R$ auf $\overline{B_r(0)}$ absolut und gleichmäßig gegen $P(z)$, und die Funktion P ist dort gleichmäßig stetig.

(Letzteres gilt nach Satz 1.)

Satz 4 soll nun verallgemeinert werden, indem wir in der obigen Situation anstelle der komplexen Zahlen z quadratische Matrizen zulassen.

2. Potenzreihen von Matrizen

Wieder sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Wir wollen für $n \times n$-Matrizen

$$A \in M_n(\mathbb{K}) := \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} : a_{i,j} \in \mathbb{K}\} \simeq \mathbb{K}^{n^2}$$

die Potenzreihe

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

erklären. Dazu statten wir $M_n(\mathbb{K})$ mit der “Operatornorm“

$$\|A\| := \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{K}^n,\ |x| \le 1\}$$

aus, wobei $|x|$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{K}^n$ ist.

Potenzreihen von Matrizen - Fortsetzung

Die Operatornorm ist submultiplikativ, d. h. es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

(Warum ist das so?), und durch wiederholte Anwendung erhalten wir $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Jetzt setzen wir für $r \in (0, R)$

$$X := X_r := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \|A\| \leq r\}, \quad Y = M_n(\mathbb{K})$$

$$\text{und} \quad f_k : X \to Y,\ A \mapsto f_k(A) := a_k A^k.$$

Ganz genau wie in 1. erhalten wir

$$\|f_k\|_\infty = \sup\{\|a_k A^k\| : \|A\| \leq r\} = |a_k| r^k$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty.$$

Wieder ist Satz 3 anwendbar und ergibt zusammen mit Satz 1:

Satz 5

Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert für jedes $r \in (0, R)$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ absolut und gleichmäßig auf $X_r = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \|A\| \leq r\}$ gegen eine gleichmäßig stetige Funktion

$$P : X_r \to M_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto P(A) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

Beispiel: Die Matrix-Exponentialfunktion

Definition: Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ die *Matrix-Exponentialfunktion* von A.

Bemerkungen:

Beispiel: Die Matrix-Exponentialfunktion

Definition: Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ die *Matrix-Exponentialfunktion* von A.

Bemerkungen:

(1) Da für die Exponentialreihe $R = \infty$ ist, ist die Konvergenz der Reihe für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ gewährleistet.

Beispiel: Die Matrix-Exponentialfunktion

Definition: Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ die *Matrix-Exponentialfunktion* von A.

Bemerkungen:

(1) Da für die Exponentialreihe $R = \infty$ ist, ist die Konvergenz der Reihe für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ gewährleistet.

(2) Die Matrix-Exponentialfunktion ist ein nützliches Hilfsmittel zur Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Beispiel: Die Matrix-Exponentialfunktion

Definition: Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ die *Matrix-Exponentialfunktion* von A.

Bemerkungen:

(1) Da für die Exponentialreihe $R = \infty$ ist, ist die Konvergenz der Reihe für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ gewährleistet.

(2) Die Matrix-Exponentialfunktion ist ein nützliches Hilfsmittel zur Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

(3) Die Funktionalgleichung $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ gilt auch für Matrizen, *wenn* diese kommutieren, d. h. wenn $AB = BA$ gilt. Insbesondere ist $\exp(A)$ für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar und es gilt $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Bemerkung

Im Skript finden Sie an dieser Stelle als 3. Beispiel zu den Anwendungen einen kurzen Abschnitt über trigonometrische Reihen, auf den wir in diesem Semester leider verzichten müssen, (was ich sehr bedaure). Diese Auslassung bringt ein wenig die Nummerierung durcheinander, daher geht es jetzt weiter mit

Satz 7

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gelte $f_n \to f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit gleichmäßiger Konvergenz. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Die Schwierigkeit beim Beweis liegt im Nachweis der Integrierbarkeit der Grenzfunktion f. Hierfür ist es sinnvoll, auf das Integrierbarkeitskriterium aus Analysis I (Abschnitt 6.2, Satz 1) zurückzugreifen. Die Einzelheiten sind im Skript auf S. M49 f. ausgeführt. Ist diese Hürde erst einmal genommen, erweist sich die Verifikation der behaupteten Identität als Einzeiler:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx \leq (b-a)\|f-f_n\|_\infty \to 0.$$

Bemerkungen

(1) Ist die Konvergenz $f_n \to f$ lediglich punktweise, können Integration und Grenzwertbildung im allgemeinen *nicht* vertauscht werden. Beispiel: Für $x \in [0,1]$ seien

$$f_n(x) := n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \text{ dabei } \chi_A(x) := \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & : & x \in A \\ 0 & : & x \notin A \end{array} \right. .$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ mit punktweiser Konvergenz, aber es ist $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen

(2) Ein entsprechender Satz gilt ebenfalls *nicht* für das uneigentliche Riemann-Integral. Auch dazu ein Beispiel:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(n,2n)}(x) \text{ für } x \in [0,\infty).$$

Dann konvergiert zwar f_n gegen Null, sogar mit gleichmäßiger Konvergenz, aber es ist wieder $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen

(2) Ein entsprechender Satz gilt ebenfalls *nicht* für das uneigentliche Riemann-Integral. Auch dazu ein Beispiel:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(n,2n)}(x) \text{ für } x \in [0, \infty).$$

Dann konvergiert zwar f_n gegen Null, sogar mit gleichmäßiger Konvergenz, aber es ist wieder $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Eine wirklich zufriedenstellende Aussage über die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung ist erst im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie möglich, die ein wesentlicher Teil der Analysis III ist.

Bemerkungen

(4) Satz 7 gilt wortgleich für Funktionenfolgen $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$, denn eine komplexwertige Funktion f ist per definitionem integrierbar genau dann, wenn $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ integrierbar sind, und das Integral ist erklärt durch

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re} f(x)dx + i \int_a^b \mathrm{Im} f(x)dx.$$

Das ist verallgemeinerbar auf Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^n$ bzw. in $M_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$:

Definition: Eine Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{K}^n, \; x \to f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$$

heißt *integrierbar*, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : [a, b] \to \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)dx := \Big(\int_a^b f_1(x)dx, ..., \int_a^b f_n(x)dx \Big),$$

entsprechend für matrixwertige Funktionen.

Folgerung (aus dieser Definition und Satz 7)

Es sei $(f_k)_k$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_k : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und es gilt (mit Grenzwertbildung im $\mathbb{K}^n$ mit einer beliebigen Norm)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

Beispiel: $A \in M_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ sei invertierbar. Dann gilt

$$\int_a^b \exp(xA)dx = A^{-1}(\exp(bA) - \exp(aA)).$$

Versuchen Sie, die Einzelheiten unter Verwendung der Exponentialreihe und der Folgerung aus Satz 7 selbst auszuführen. Falls nötig, finden Sie Hilfestellung auf S. M52 des Skripts.

Naheliegende Fragestellung

Nach Satz 7 sind Integration und Grenzwertbildung einer Funktionenfolge vertauschbar, wenn die Folge der Integranden auf einem kompakten Intervall gleichmäßig konvergiert. Es schließt sich die Frage an, ob auch die Ableitung mit der Limesbildung bei gleichmäßiger Konvergenz vertauscht werden kann. Die Antwort ist nicht ein einfaches "Ja", denn es kommt auf die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen an, wie der folgende Satz aussagt.

Satz 8

Es sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

Satz 8

Es sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (punktweiser Limes),

Satz 8

Es sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (punktweiser Limes),

(2) es gibt eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0$ (gleichmäßiger Grenzwert der Ableitungen).

Satz 8

Es sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (punktweiser Limes),

(2) es gibt eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $\lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0$ (gleichmäßiger Grenzwert der Ableitungen).

Dann ist f stetig differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis

Der ist in diesem Fall kürzer als die Formulierung des Satzes:

Nach Satz 1 ist g stetig, da alle f_n' nach Voraussetzung stetig sind. Ferner ergeben der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Satz 7, dass

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt$$

$$= f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Nach dem Hauptsatz können wir die rechte Seite ableiten, damit ist auch die linke Seite, also f, differenzierbar und wir erhalten $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. $\square$

Verallgemeinerung

Satz 8 lässt sich in naheliegender Weise verallgemeinern auf Funktionenfolgen $(f_k)_k$ mit $\mathbb{K}^n$- oder matrixwertigen Funktionen f_k. Dazu erklären wir (gegenüber dem Manuskript etwas abkürzend) die Ableitung einer $\mathbb{K}^n$-wertigen Funktion komponentenweise, also durch

$$f'(x) := (f_1'(x), ..., f_n'(x)),$$

wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{K}^n$ gegeben ist durch

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)).$$

Dann erben wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der folgenden Form:

Hauptsatz für $\mathbb{K}^n$-wertige Funktionen

(1) Ist $f \in C([a,b],\mathbb{K}^n)$, so gilt

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

Hauptsatz für $\mathbb{K}^n$-wertige Funktionen

(1) Ist $f \in C([a,b],\mathbb{K}^n)$, so gilt

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

(2) für $g \in C^1([a,b],\mathbb{K}^n)$ ist

$$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a).$$

Hauptsatz für $\mathbb{K}^n$-wertige Funktionen

(1) Ist $f \in C([a,b],\mathbb{K}^n)$, so gilt

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

(2) für $g \in C^1([a,b],\mathbb{K}^n)$ ist

$$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a).$$

Hierin kann $\mathbb{K}^n$ durch $M_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ ersetzt werden. In (2) reicht es, g als differenzierbar mit integrierbarer Ableitung (alle Komponenten) vorauszusetzen.

Allgemeinere Form von Satz 8

Wenn wir diese allgemeinere Form des Hauptsatzes im Beweis von Satz 8 verwenden, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung:

Satz 8': Es sei $f_k : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

Allgemeinere Form von Satz 8

Wenn wir diese allgemeinere Form des Hauptsatzes im Beweis von Satz 8 verwenden, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung:

Satz 8': Es sei $f_k : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (punktweiser Limes in jeder Komponente),

Allgemeinere Form von Satz 8

Wenn wir diese allgemeinere Form des Hauptsatzes im Beweis von Satz 8 verwenden, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung:

Satz 8': Es sei $f_k : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (punktweiser Limes in jeder Komponente),

(2) es gibt eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, für die $\lim_{k\to\infty} \|f_k' - g\|_\infty = 0$ (gleichmäßiger Grenzwert der Ableitungen).

Allgemeinere Form von Satz 8

Wenn wir diese allgemeinere Form des Hauptsatzes im Beweis von Satz 8 verwenden, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung:

Satz 8': Es sei $f_k : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (punktweiser Limes in jeder Komponente),

(2) es gibt eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, für die $\lim_{k\to\infty} \|f_k' - g\|_\infty = 0$ (gleichmäßiger Grenzwert der Ableitungen).

Dann ist $f \in C^1([a, b], \mathbb{K}^n)$ und es gilt $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Bemerkung: Für eine $\mathbb{K}^n$-wertige Funktion $g = (g_1, ..., g_n)$ ist $\|g\|_\infty = \sum_{i=1}^n \|g_i\|_\infty$.

Beispiel zur Matrix-Exponentialfunktion

Zum Abschluss diesmal eine Rechenaufgabe: Gegeben seien die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

Beispiel zur Matrix-Exponentialfunktion

Zum Abschluss diesmal eine Rechenaufgabe: Gegeben seien die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(1) $AB = 0$ und $\|AB\| < \|A\|\|B\|$,

Beispiel zur Matrix-Exponentialfunktion

Zum Abschluss diesmal eine Rechenaufgabe: Gegeben seien die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(1) $AB = 0$ und $\|AB\| < \|A\|\|B\|$,

(2) $AB \neq BA$ und $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$,

Beispiel zur Matrix-Exponentialfunktion

Zum Abschluss diesmal eine Rechenaufgabe: Gegeben seien die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(1) $AB = 0$ und $\|AB\| < \|A\|\|B\|$,

(2) $AB \neq BA$ und $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$,

(3) $e^{A+B} \neq e^A e^B$.