Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

1.5 Kompaktheit

In Analysis I haben wir den Begriff der Kompaktheit bereits kennengelernt und aufgefasst als

$K \subset \mathbb{K}$ ist kompakt $\quad :\Leftrightarrow \quad K$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Diese Definitionen erweist sich in allgemeinen metrischen Räumen als unzureichend. Wir werden hier die "Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft"(Konvergenz einer Teilfolge) zur Charakterisierung der Kompaktheit verwenden. Im folgenden sei stets (X, d) ein metrischer Raum mit $X \neq \emptyset$.

Definition: Kompaktheit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) heißt kompakt, wenn der metrische Teilraum (K, d) kompakt ist.

Um den Zusammenhang zwischen Kompaktheit (im Sinne der neuen Definition) einerseits und Beschränktheit und Abgeschlossenheit andererseits zu klären, müssen wir zunächst festlegen, was unter Beschränktheit in metrischen Räumen zu verstehen ist.

Beschränktheit metrischen Räume

Definition: Ein metrischer Raum (X, d) heißt *beschränkt*, wenn

$$\mathrm{diam}(X) := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\} < \infty$$

ist. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt beschränkt, wenn (M, d) beschränkt ist.

Bemerkungen:

(1) diam steht für Diameter = Durchmesser.

Bemerkungen:

(1) diam steht für Diameter = Durchmesser.

(2) Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann beschränkt, wenn es $x_0 \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $d(x, x_0) \leq R$ für alle $x \in X$.

Bemerkungen:

(1) diam steht für Diameter = Durchmesser.

(2) Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann beschränkt, wenn es $x_0 \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $d(x, x_0) \leq R$ für alle $x \in X$.

(3) Insbesondere ist eine Teilmenge M eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, \|\ \ \|)$ genau dann beschränkt, wenn ein $R > 0$ existiert, so dass $\|x\| \leq R$ für alle $x \in M$.

Bemerkungen:

(1) diam steht für Diameter = Durchmesser.

(2) Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann beschränkt, wenn es $x_0 \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $d(x, x_0) \leq R$ für alle $x \in X$.

(3) Insbesondere ist eine Teilmenge M eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, \|\ \ \|)$ genau dann beschränkt, wenn ein $R > 0$ existiert, so dass $\|x\| \leq R$ für alle $x \in M$.

(4) Eine Folge $(x_n)_n$ in (X, d) heißt beschränkt, wenn $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Bemerkungen:

(1) diam steht für Diameter = Durchmesser.

(2) Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann beschränkt, wenn es $x_0 \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $d(x, x_0) \leq R$ für alle $x \in X$.

(3) Insbesondere ist eine Teilmenge M eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, \| \quad \|)$ genau dann beschränkt, wenn ein $R > 0$ existiert, so dass $\|x\| \leq R$ für alle $x \in M$.

(4) Eine Folge $(x_n)_n$ in (X, d) heißt beschränkt, wenn $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(5) Jede Cauchy-Folge (und damit auch jede konvergente Folge) in einem metrischen Raum (X, d) ist beschränkt.

Satz 1

(1) Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt und vollständig.

Satz 1

(1) Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt und vollständig.

(2) Jede kompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) ist beschränkt und abgeschlossen

Satz 1

(1) Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt und vollständig.

(2) Jede kompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) ist beschränkt und abgeschlossen

Beweis: Zu (1). Zuerst die Vollständigkeit: Ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in (X, d), so besitzt diese wegen der Kompaktheitsvoraussetzung eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$, deren Grenzwert mit x_0 bezeichnet sei. Hierfür gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \to 0 \quad (n, k \to \infty).$$

Also ist $(x_n)_n$ konvergent und damit (X, d) vollständig.

Fortsetzung des Beweises

Weiter zu (1). Beschränktheit: Gilt für ein $x_0 \in X$, dass $\sup\{d(x, x_0) : x \in X\} = \infty$, so existiert eine Folge $(x_n)_n$ in X mit $d(x_0, x_n) \geq n$. Diese besitzt keine beschränkte, also auch keine konvergente Teilfolge.

Zu (2). Hier ist nach (1) nur noch die Abgeschlossenheit zu zeigen. Dazu seien $(x_n)_n$ eine Folge in K und $x_0 \in X$, so dass $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Dann ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in (K, d) und nach Teil (1) konvergent gegen ein $y \in K$. Die Eindeutigkeit des Grenzwerts ergibt $x_0 = y \in K$, was die Abgeschlossenheit von K in (X, d) zeigt. $\square$

Ein Beispiel

Kompaktheit impliziert also Abgeschlossenheit und Beschränktheit. Im Allgemeinen handelt es sich um eine echt stärkere Eigenschaft, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $X = \mathbb{N}$ mit der Trivialmetrik d ausgestattet, also $d(n, m) = 1$, wann immer $n \neq m$. Dann ist X als Teilmenge von (X, d) beschränkt und abgeschlossen (Warum?), aber nicht kompakt, denn für $n \neq m$ ist $d(n, m) = 1$. Die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = n$ kann also keine konvergente Teilfolge besitzen.

Ein Beispiel

Kompaktheit impliziert also Abgeschlossenheit und Beschränktheit. Im Allgemeinen handelt es sich um eine echt stärkere Eigenschaft, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $X = \mathbb{N}$ mit der Trivialmetrik d ausgestattet, also $d(n, m) = 1$, wann immer $n \neq m$. Dann ist X als Teilmenge von (X, d) beschränkt und abgeschlossen (Warum?), aber nicht kompakt, denn für $n \neq m$ ist $d(n, m) = 1$. Die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = n$ kann also keine konvergente Teilfolge besitzen.

Im $\mathbb{K}^n$ mit der Standardmetrik fallen jedoch ebenso wie in $\mathbb{K}$ beide Begriffe zusammen. Dies folgt aus dem

Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{K}^n$

Satz 2: Jede beschränkte Folge $(x_k)_k$ im $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Der Beweis wird per Induktion über die Raumdimension n geführt, wobei der Fall $n = 1$ aus Analysis I bekannt ist. Das Argument für den Induktionsschritt haben wir ebenfalls in Analysis I schon gesehen, als wir den Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$ aus demjenigen für $\mathbb{R}$ gefolgert haben. Daher sei an dieser Stelle auf weitere Einzelheiten verzichtet. Im Skript finden Sie diese jedoch auf den Seiten M68 f. ausgeführt.

Folgerung

Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ ist kompakt.

Beweis: Ist $(x_n)_n$ eine Folge in A, so ist diese beschränkt, besitzt also nach Satz 2 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Deren Grenzwert sei $x \in \mathbb{K}^n$. Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in A$. Also ist A kompakt.

Wir kommen nun zu einigen Sätzen über stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich. Dabei handelt es sich um natürliche Verallgemeinerungen von Aussagen, die uns bereits in der Analysis I begegnet sind.

Satz 3

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $K \subset X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Dann gelten:

(1) f ist gleichmäßig stetig.

Satz 3

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $K \subset X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Dann gelten:

(1) f ist gleichmäßig stetig.

(2) $f(K)$ ist kompakt.

Für den Beweis dieses Satzes, der bekannte Argumente in allgemeinerem Rahmen wiederholt, sei erneut auf das Skript verwiesen (S. M70 f.).

Satz 3

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $K \subset X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Dann gelten:

(1) f ist gleichmäßig stetig.

(2) $f(K)$ ist kompakt.

Für den Beweis dieses Satzes, der bekannte Argumente in allgemeinerem Rahmen wiederholt, sei erneut auf das Skript verwiesen (S. M70 f.).

Als Folgerung aus Satz 3 erhalten wir wiederum den Satz vom Maximum: Ist $\emptyset \neq K$ Kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf K ihr Maximum und ihr Minimum an.

Denn: Die kompakte Menge $f(K) \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum, wie wir in Analysis I gezeigt haben.

Eine Anwendung des Satzes vom Maximum

Satz 4: Ist $A \subset \mathbb{K}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so gilt $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{K}^n$.

Beweis: Wir zeigen: Ist A eine abgeschlossene, nichtleere und echte Teilmenge des $\mathbb{K}^n$, so besitzt A mindestens einen Randpunkt (und ist daher nicht offen).

(Zwischenfrage: Inwiefern liefert das die Behauptung in Satz 4 ?)

Beweis von Satz 4

Wir wählen $x \in A$ und $y \in A^c$ und betrachten die Verbindungsstrecke

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Diese ist abgeschlossen und beschränkt und daher kompakt. Ebenso ist $K := A \cap [x, y]$ kompakt. Die Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, \quad z \to f(z) := |x - z|$$

ist stetig, nimmt also in einem $z_0 \in K$ ihr Maximum an. Nun zeigen wir, dass es sich bei z_0 um einen Randpunkt von A handelt.

Beweis von Satz 4 - Fortsetzung

Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Dann wählen wir

$$z_\varepsilon := z_0 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{y - x}{|y - x|}.$$

Sofern ε klein genug ist, gilt $z_\varepsilon \in [x, y]$, aber wegen $f(z_\varepsilon) > f(z_0)$ ist $z_\varepsilon \notin K$ und somit auch $z_\varepsilon \notin A$. Damit ist $z_\varepsilon \in B_\varepsilon(z_0) \cap A^c$, und wegen $z_0 \in A$ ist also die Randpunkteigenschaft von z_0 nachgewiesen. $\square$

Beispiel

Besteht ein metrischer Raum (X, d) aus zwei Teilräumen (X_1, d) und (X_2, d), so dass $X = X_1 \cup X_2$ und

$$\operatorname{dist}(X_1, X_2) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\} > 0,$$

so nennt man X_1 und X_2 die "Zusammenhangskomponenten" von X. (Denken Sie z. B. an zwei Kugeln im $\mathbb{R}^n$, die sich nicht berühren, und deren Vereinigung den metrischen Raum X bildet.) In diesem Fall haben alle vier Mengen: $\emptyset$, X_1, X_2 und X die Eigenschaft, sowohl offen als auch abgeschlossen zu sein. Damit ist die "weiterführende Fragestellung" (2) aus der dritten Vorlesung beantwortet.

Abschließende Bemerkung zur Kompaktheit

In verschiedenen Lehrbüchern (z. B. Forster, Königsberger) finden Sie die folgende Definition von Kompaktheit:

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, wenn aus jeder Überdeckung

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

mit offenen Mengen U_i eine endliche Teilüberdeckung

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{i_j}$$

ausgewählt werden kann ("Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft"). Man spricht dann auch von "Überdeckungskompaktheit" im Gegensatz zu "Folgenkompaktheit", was unserer Definition (Existenz einer konvergenten Teilfolge) entspricht. In metrischen Räumen sind beide Begriffe äquivalent, einen Beweis der Äquivalenz finden Sie in: Kaballo II, Abschnitt 10.

Richtig oder falsch?

Ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, sollten Sie nach der Lektüre beantworten können. Falls nicht, sollten Sie noch einmal genauer nachlesen. Hierbei seien stets $A, K, K_1, \ldots$ Teilmengen eines metrischen Raums (X, d).

(1) Ist $A \subset X$ beschränkt und $K \subset A$, so ist auch K beschränkt.

(2) Sind K_1 und K_2 kompakt, so ist auch $K_1 \cup K_2$ kompakt.

(3) Sind K_1 und K_2 kompakt, so ist auch $K_1 \cap K_2$ kompakt.

(4) Ist K kompakt und A abgeschlossen, so ist auch $A \cap K$ kompakt.

(5) Ist K kompakt und A abgeschlossen, so ist auch $A \cup K$ abgeschlossen.

Weiterführende Fragestellungen

(1) Zum Beweis von Satz 4: Wie sieht man - möglichst leicht - ein, dass die Verbindungsstrecke $[x, y]$ beschränkt und abgeschlossen ist?

(2) Es seien

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_2 < \infty\}$$

der Vektorraum aller quadratsummierbaren Folgen, versehen mit der Norm

$$\|x\|_2 := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

und, darin enthalten, $B := \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$. Offenbar ist B beschränkt. Ist B abgeschlossen? Und schließlich: Ist B kompakt?