Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

2. Fortsetzung zur totalen Differenzierbarkeit

Nach wie vor befinden wir uns im Abschnitt 2.2 über die totale Differenzierbarkeit und haben beim letzten Mal die Kettenregel für vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen ausführlich diskutiert. Einer der zentralen Sätze im Kapitel Differenzierbarkeit in der Analysis I ist der Mittelwertsatz, aus dem wir viele wichtige Folgerungen gezogen haben. Bedauerlicherweise lässt sich dieser Satz für vektorwertige Funktionen nur teilweise verallgemeinern, was im Folgenden besprochen werden soll.

Erinnerung und Vorbemerkung

Der Mittelwertsatz (MWS) für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen lautet:

Für eine differenzierbare Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)$$

existiert eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$, so dass

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

In dieser Form gilt der Satz nicht für komplexwertige (also auch nicht für vektorwertige) Funktionen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^\top$. Dann ist $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))^\top$ und somit $|\gamma'(t)| = 1$ für alle reellen Zahlen t. Wählen wir $b = 2\pi$ und $a = 0$, so ist also für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$0 = \gamma(b) - \gamma(a) \neq \gamma'(\xi)(b-a),$$

denn der Absolutbetrag der rechten Seite ist stets $= b - a = 2\pi$.

Der MWS mit Gleichheit funktioniert im vektorwertigen Fall also nicht, aber immerhin ist der Beweis einer Ungleichung möglich, die für viele Zwecke ausreicht.

Satz 5

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x, x+h \in \Omega$, so dass die gesamte Strecke $[x, x+h] := \{x + th : 0 \leq t \leq 1\}$ in Ω liegt. $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sei total differenzierbar. Dann gilt

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sup\{\|Df(\xi)\| : \xi \in [x, x+h]\}|h|.$$

Bemerkung: Die im Supremum auftretende Norm ist die Operatornorm der Jacobi-Matrix im Punkt ξ, die als lineare Abbildung aufgefasst wird.

Beweis der Mittelwertungleichung

Für $\varphi(t) := f(x + th)$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und aufgrund der Kettenregel

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 Df(x+th)hdt$$

und daher - mit der Dreiecksungleichung für Integrale -

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \int_0^1 |Df(x+th)h|dt \leq \int_0^1 \|Df(x+th)\||h|dt$$

$$\leq \sup\{\|Df(\xi)\| : \xi \in [x, x+h]\}|h|.$$

$\square$

Anwendungen

Mit Hilfe von Satz 5 können wir einige der Folgerungen, die wir in Analysis I aus dem MWS gezogen haben, auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe:

Definition

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(1) *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to M$ (ein "Weg") existiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$;

Definition

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(1) *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to M$ (ein "Weg") existiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$;

(2) ein *Gebiet*, wenn sie wegzusammenhängend und offen ist;

Definition

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(1) *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to M$ (ein "Weg") existiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$;

(2) ein *Gebiet*, wenn sie wegzusammenhängend und offen ist;

(3) *sternförmig*, wenn ein $x_0 \in M$ existiert, so dass zu jedem $y \in M$ die Verbindungsstrecke $[x_0, y]$ ganz in M enthalten ist;

Definition

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(1) *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to M$ (ein "Weg") existiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$;

(2) ein *Gebiet*, wenn sie wegzusammenhängend und offen ist;

(3) *sternförmig*, wenn ein $x_0 \in M$ existiert, so dass zu jedem $y \in M$ die Verbindungsstrecke $[x_0, y]$ ganz in M enthalten ist;

(4) *konvex*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt, dass $[x, y] \subset M$.

Bemerkung und Beispiele

(1) Es gelten die Implikationen

$$\text{konvex} \quad \Rightarrow \quad \text{sternförmig} \quad \Rightarrow \quad \text{wegzusammenhängend.}$$

Bemerkung und Beispiele

(1) Es gelten die Implikationen

$$\text{konvex} \quad \Rightarrow \quad \text{sternförmig} \quad \Rightarrow \quad \text{wegzusammenhängend.}$$

(2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ ist sternförmig, aber nicht konvex.

Bemerkung und Beispiele

(1) Es gelten die Implikationen

$$\text{konvex} \quad \Rightarrow \quad \text{sternförmig} \quad \Rightarrow \quad \text{wegzusammenhängend.}$$

(2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ ist sternförmig, aber nicht konvex.

(3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist wegzusammenhängend, aber nicht sternförmig.

Der Schrankensatz

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar mit $\sup\{\|Df(\xi)\| : \xi \in \Omega\} < \infty$, so ist f Lipschitz-, also insbesondere gleichmäßig stetig.

Beweis: Da Ω konvex ist, ergibt die Mittelwertungleichung

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \sup\{\|Df(\xi)\| : \xi \in [x, y]\}|y - x| \\ &\leq \sup\{\|Df(\xi)\| : \xi \in \Omega\}|y - x|. \end{aligned}$$

$\square$

Der Schrankensatz gilt nicht mehr, wenn wir lediglich die Sternförmigkeit von Ω voraussetzen. Ein Beispiel dazu finden Sie im Skript, S. D26 f..

Eine weitere Folgerung aus Satz 5

Als zweite Folgerung aus der Mittelwertungleichung notieren wir:

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar mit $Df(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \Omega$, so ist f konstant.

Beweis: $|f(x) - f(x_0)| \leq \sup\{\|Df(\xi)\| : \xi \in \Omega\}|x - x_0| = 0.$

$\square$

Bemerkung: Diese Folgerung gilt sogar für *alle* Gebiete Ω, auch wenn diese nicht sternförmig sind. Ohne die Zusammenhangsvoraussetzung wird die Aussage allerdings falsch. Für ein diesbezügliches Beispiel sei erneut auf das Skript (S. D27) verwiesen.

Der Fall reellwertiger Funktionen mehrerer Veränderlicher

In diesem Fall können wir den folgenden Mittelwertsatz zeigen, mit dem wir diesen Abschnitt abschließen und zugleich Anlauf nehmen auf die Taylorformel für solche Funktionen.

Satz 6

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x, x+h \in \Omega$ mit $[x, x+h] \subset \Omega$. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sei total differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in [x, x+h]$, so dass

$$f(x+h) - f(x) = \nabla f(\xi) h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) h_k.$$

Beweis: Wir setzen $\varphi(t) := f(x+th)$, so dass aufgrund des Mittelwertsatzes für reellwertige Funktionen eine Variablen

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \nabla f(x + \theta h) h$$

mit einem $\theta \in (0,1)$. Setzt man $\xi = x + \theta h \in [x, x+h]$, so ist dies die behauptete Gleichung.

$\square$