Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Am Ende der letzten Vorlesungsaufzeichnung haben wir die Methode der Variablentrennung sowohl in Form eines Satzes wie auch anhand von Beispielen diskutiert. Diese Methode wird auch verwendet, um das Anfangswertproblem für lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung zu lösen. Um welchen Typ Gleichung handelt es sich dabei?

Definition: Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $p, q \in C(I, \mathbb{R})$. Dann heißt die Dgl.

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$$

eine *lineare Dgl. erster Ordnung*. Sie heißt *homogen*, falls $q = 0$ ist, andernfalls *inhomogen*.

Bezüglich des Anfangswertproblems für diese Gleichung gilt der folgende

Satz 2

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $p, q \in C(I, \mathbb{R})$.
Dann besitzt das Anfangswertproblem (AWP) für die Dgl.

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$$

die eindeutige Lösung

$$y(x) = \varphi(x)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)} dt\Big),$$

wobei $\varphi(x) = \exp\big(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\big)$ die Lösung der homogenen Gleichung $y'(x) = p(x)y(x)$ mit $\varphi(x_0) = 1$ ist.

Herleitung

(1) Die Lösung der homogenen Gleichung gewinnt man durch Separation (= Trennung der Variablen):

$$y'(x) = p(x)y(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y(x)}{y(x_0)}\right) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$$

$$\Rightarrow y(x) = y(x_0) \exp\big(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\big).$$

Für $y_0 = 1$ erhält man φ wie oben angegeben.

Herleitung (Fortsetzung)

(2) Für die inhomogene Gleichung $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$ mit $q \neq 0$ macht man einen Produktansatz

$$y(x) = c(x)\varphi(x) = c(x) \exp\Big(\int_{x_0}^{x} p(t)dt \Big).$$

(Dieser Ansatz wird als "Variation der Konstanten" bezeichnet, diese Methode geht zurück auf Lagrange.) Mit der Produktregel folgt

$$y'(x) = c'(x)\varphi(x) + c(x)\varphi'(x),$$

wobei

$$c(x)\varphi'(x) = c(x)p(x)\varphi(x) = p(x)y(x).$$

Herleitung (Fortsetzung)

Wir erhalten also eine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn $c'(x)\varphi(x) = q(x)$ bzw. wenn

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)} dt$$

ist. Daher ist mit

$$y_p(x) := \varphi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)} dt$$

eine spezielle (sogenannte partikuläre) Lösung gewonnen, die das AWP $y(x_0) = 0$ löst. Addiert man nun die Teilergebnisse aus (1) und (2), wird man auf die in Satz 2 angegebene Lösung geführt.

Zum Beweis des Satzes

Der Beweis insbesondere der Existenzaussage ist in diesem Fall weniger instruktiv als die Herleitung. Man hat nachzurechnen, dass die angegebene Lösung das gewünschte leistet, und das wird Ihnen nicht schwer fallen, alternativ können Sie diese kurze Rechnung auch im Manuskript nachlesen. Der Eindeutigkeitsteil des Beweises bringt immerhin ein weiteres einfaches Argument, was man im Zusammenhang mit linearen Dgln. (auch partiellen) immer wieder brauchen kann:
Man nimmt die Existenz zweier Lösungen von Dgl. und AWP an, im vorliegenden Fall - sagen wir - $y, z \in C^1(I, \mathbb{R})$. Dann löst die Differenz $w = y - z$ die homogene lineare Dgl. mit Anfangswert $y_0 = 0$. Nun überzeugt man sich durch eine kurze Rechnung davon, dass der Quotient $\frac{w}{\varphi}$ konstant ist, woraus wegen $w(x_0) = 0$ folgt, dass w identisch verschwindet. (Auch hier können Sie die Rechnung im Detail im Manuskript nachlesen.)

Diskussion: Wohlgestelltheit

Das Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ für die lineare Dgl. 1. Ordnung ist wohlgestellt.
Beweis dieser Feststellung: Existenz und Eindeutigkeit - in $C^1(I, \mathbb{R})$ - sind Gegenstand des Satzes. Der Lösungsoperator

$$S : \mathbb{R} \to C^1(I, \mathbb{R}),\ y_0 \mapsto \varphi(x)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)} dt\Big)$$

(Daten auf Lösungen) ist explizit gegeben. Für ein beschränktes Intervall I betrachten wir $C^1(I, \mathbb{R})$ ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_1 := \sup\{|f(x)| : x \in I\} + \sup\{|f'(x)| : x \in I\} =: \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Dann ist

$$\|Sy_0 - Sz_0\|_1 = \|\varphi(y_0 - z_0)\|_1 = |y_0 - z_0| \|\varphi\|_1,$$

Diskussion: Wohlgestelltheit (Fortsetzung)

wobei

$$\|\varphi\|_1 = \sup\{\exp\big(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\big) : x \in I\} + ..$$

$$.. + \sup\{|p(x)| \exp\big(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\big) : x \in I\} < \infty.$$

Also ist $S : \mathbb{R} \to C^1(I, \mathbb{R})$ Lipschitz-stetig. Für ein unbeschränktes Intervall I ist die Diskussion etwas komplizierter; eine Möglichkeit, nämlich die obige $\| \quad \|_1$ mit einer zusätzlichen Gewichtsfunktion zu verwenden, finden Sie im Skript ausgeführt. Aber auch in diesem Fall erweist sich der Lösungsoperator als Lipschitz-stetig.

Diskussion: Struktur des Lösungsraums (homogene Gleichung

Unter dem Lösungsraum ist die Menge aller Lösungen der Dgl. (ohne Anfangsbedingung) zu verstehen. Im Fall der homogenen Gleichung handelt es sich um einen eindimensionalen Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R})$. In der Tat ist

$$S_h : \mathbb{R} \to C^1(I, \mathbb{R}),\ y_0 \mapsto S_h y_0 := \varphi y_0$$

linear und injektiv und daher

$$S_h : \mathbb{R} \to S_h(\mathbb{R}) \subset C^1(I, \mathbb{R})$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Diskussion: Struktur des Lösungsraums (inhomogene Gleichung)

In diesem Fall ist jede Lösung der Gestalt

$$y = \varphi y_0 + y_p$$

mit $\varphi y_0 \in S_h(\mathbb{R})$ und einer speziellen Lösung y_p der inhomogenen Gleichung. Die Gesamtheit aller Lösungen bildet hier also einen eindimensionalen affinen Teilraum von $C^1(I, \mathbb{R})$. (Ähnliches gilt auch für Systeme linearer Gleichungen 1. Ordnung und für lineare Gleichungen höherer Ordnung. Die Lösungsräume haben dann allerdings eine größere Dimension.)

Beispiel 3

Wir lösen das Anfangswertproblem $y(0) = y_0$ für die inhomogene lineare Dgl.

$$y'(x) = \cos(x) y(x) + \cos(x) \sin(x).$$

Hierfür ist

$$\varphi(x) = \exp\Big(\int_0^x \cos(t) dt\Big) = \exp(\sin(x))$$

und

$$y_p(x) = \varphi(x) \int_0^x \cos(t) \sin(t) \exp(-\sin(t)) dt.$$

Mit der Substitution $z = \sin(t)$, so dass symbolisch "$dz = \cos(t) dt$", ergibt sich

Beispiel 3 (Fortsetzung)

$$\int_0^x \cos(t)\sin(t)\exp(-\sin(t))dt = \int_0^{\sin(x)} ze^{-z}dz.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int ze^{-z}dz = -(z+1)e^{-z},$$

also

$$\int_0^x \cos(t)\sin(t)\exp(-\sin(t))dt = -(\sin(x)+1)\exp(-\sin(x))+1$$

und damit $y_p(x) = \exp(\sin(x)) - \sin(x) - 1$. Insgesamt:

$$y(x) = (y_0+1)\exp(\sin(x)) - \sin(x) - 1.$$

Die Bernoulli'sche Differenzialgleichung

Nah verwandt mit der linearen Dgl. 1. Ordnung ist die Bernoullische Dgl.

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y(x)^{\alpha},$$

wobei $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Diese läßt sich nämlich unter der Voraussetzung der Positivität der Lösung auf eine (im allgemeinen inhomogene) lineare Dgl. erster Ordnung zurückführen, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 1

Genau dann ist $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ eine positive Lösung der Bernoullischen Dgl., wenn $z := y^{1-\alpha} \in C^1(I, \mathbb{R})$ eine positive Lösung der linearen Gleichung

$$z'(x) = (1 - \alpha)(p(x)z(x) + q(x))$$

ist.

Beweis

(1) Es sei $y' = py + qy^\alpha$ und $z = y^{1-\alpha}$. Dann ist

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)(py^{1-\alpha} + q) = (1-\alpha)(pz+q).$$

(2) Umgekehrt sei $z' = (1-\alpha)(pz+q)$ und $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Dann folgt

$$y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} z' = pz^{\frac{1}{1-\alpha}} + qz^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = py + qy^\alpha.$$

$\square$

Anwendung: Ein Wachstumsmodell

Ein einfaches Modell für das Wachstum von Populationen ist die Bernoullische Dgl.

$$N' = gN - sN^2$$

mit $N, g, s > 0$. Hierbei ist

- $N = N(x)$ die Anzahl der Individuen,
- g die konstante Geburtenrate und
- sN die linear wachsende Sterberate.

Der lineare Term gN dominiert die rechte Seite, wenn $N << \frac{g}{s}$. In diesem Regime ist das Wachstum annähernd proportional zur Bevölkerungszahl. In diesem Bereich ist mit einem im wesentlichen exponentiellen Wachstum zu rechnen.

Fortsetzung: Wachstumsmodell

Daneben enthält die rechte Seite der Gleichung den quadratischen Korrekturterm $-sN^2$. Dieser bewirkt, dass für $sN \to g$ die Ableitung N' gegen Null strebt. Das Wachstum kommt zum Erliegen, wenn die Grenzpopulation $N_\infty := \dfrac{g}{s}$ erreicht wird. (Ein möglicher Grund hierfür ist z. B. eine begrenzte Nahrungsmenge.)

Es liegt eine Bernoullische Dgl. mit $\alpha = 2$ vor. Zu deren Lösung setzen wir gemäß Lemma 1 $z := N^{-1}$ und erhalten als lineare Dgl.

$$z' = -gz + s.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$z_h(x) = Ce^{-gx},$$

Fortsetzung: Wachstumsmodell

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist aufgrund der Vorüberlegung leicht zu erraten, nämlich die konstante Lösung

$$z_p(x) = \frac{1}{N_\infty} = \frac{s}{g}.$$

Es folgt $z(x) = \frac{s}{g} - ce^{-gx}$ und damit

$$N(x) = \frac{1}{\frac{s}{g} - ce^{-gx}} = \frac{e^{gx}}{\frac{s}{g}e^{gx} - c},$$

was tatsächlich $\lim_{x\to\infty} N(x) = N_\infty$ bedeutet.

Anregungen: Lösen Sie die Dgl. $N' = gN - sN^2$ direkt durch Separation. - Alternative Wachstumsmodelle werden im Buch "Gewöhnliche Differenzialgleichungen" von W. Walter diskutiert (Kap. I, 1, XIII).