Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

Berechnung von Lösungsfundamentalsystemen (LFS), Teil I

Während wir für eine einzelne lineare Dgl. 1. Ordnung, also für $y' = py + q$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, über die Lösungsformel

$$y(x) = \varphi(x)\big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)} dt\big)$$

mit

$$\varphi(x) = \exp\big(\int_{x_0}^{x} p(t) dt\big)$$

verfügen, gibt es für $n \geq 2$ kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von Lösungsfundamentalsystemen für das homogene lineare Dgl.-System $y' = Py$. Daher sollen einige Spezialfälle diskutiert werden, die man systematisch behandeln kann.

Fall I: Entkoppelte Systeme

Hier nimmt man an, dass die Matrix P Diagonalgestalt hat, d. h. wir haben $p_{ij} = 0$ für $i \neq j$. In diesem Fall nennt man das System *entkoppelt*, denn es reduziert sich auf die n voneinander unabhängigen Gleichungen

$$y_i'(x) = p_{ii}(x) y_i(x), \qquad 1 \leq i \leq n,$$

mit den Lösungen $\varphi_i(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p_{ii}(t)dt\right)$ oder, wenn man die Anfangsbedingung zunächst unberücksichtigt läßt, etwas allgemeiner $\varphi_i(x) = \exp\left(\int p_{ii}(x)dx\right)$. Hieraus kann man ein LSF in Diagonalform zusammenstellen, nämlich

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & 0 & .... & 0 \\ 0 & \varphi_2(x) & .... & 0 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ 0 & .... & 0 & \varphi_n(x) \end{pmatrix}.$$

Anfangwertproblem bei entkoppelten Systemen

Ist das Anfangswertproblem (AWP) $y(x_0) = y_0$ zu lösen, wählt man meist

$$y_i(x) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} p_{ii}(t)dt\Big)$$

und als LFS

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & 0 & .... & 0 \\ 0 & y_2(x) & .... & 0 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ 0 & .... & 0 & y_n(x) \end{pmatrix}$$

mit $Y(x_0) = E_n$, so dass die Lösung von $y' = Py$, $y(x_0) = y_0$ gegeben ist durch $y(x) = Y(x)y_0$.

Fall II: Systeme in Dreiecksgestalt

Die Matrix $P(x)$ sei für alle $x \in I$ eine rechte obere Dreiecksmatrix, d. h. wir haben $p_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i > j$. Im Hinblick darauf, dass die Inverse einer regulären rechten oberen Dreiecksmatrix eine ebensolche Dreiecksmatrix ist, versuchen wir, ein LFS Φ von $y' = Py$ der Gestalt

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & .. & .... & \varphi_{1n}(x) \\ 0 & \varphi_{22}(x) & .... & \varphi_{2n}(x) \\ 0 & 0 & . \quad .. & . \\ & & . & . \\ 0 & & 0 & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

zu finden. Gehen wir mit diesem Ansatz in die Matrix-Dgl. $Y' = PY$ ein, erhalten wir

Systeme in Dreiecksgestalt, Allgemeines (2)

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdot\cdot & \cdots & \varphi_{1n} \\ & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \varphi_{nn} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot\cdot & \cdots & p_{1n} \\ & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdot\cdot & \cdots & \varphi_{1n} \\ & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

Das entspricht für $i \leq k$ den Differenzialgleichungen

$$\varphi'_{ik} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\varphi_{jk}.$$

Nun ist $p_{ij} \neq 0$ nur für $i \leq j$ und $\varphi_{jk} \neq 0$ nur für $j \leq k$, so dass sich diese Summe reduziert auf

$$\varphi'_{ik} = \sum_{j=i}^{k} p_{ij}\varphi_{jk}.$$

Systeme in Dreiecksgestalt: Diagonalelemente des LFS

Wählen wir jetzt die richtige Reihenfolge, so können wir diese Gleichungen systematisch lösen. Für die Diagonalelemente haben wir eine homogene lineare Dgl. erster Ordnung, nämlich

$$\varphi_{ii}' = p_{ii}\varphi_{ii}, \quad 1 \le i \le n$$

mit der Lösung

$$\varphi_{ii}(x) = \exp\Big(\int p_{ii}(x)dx\Big),$$

die in dieser Schreibweise eine noch wählbare multiplikative Konstante $c_{ii} > 0$ enthält.

Systeme in Dreiecksgestalt: Elemente der ersten Nebendiagonale

Dann gehen wir über zur ersten oberen Nebendiagonalen, also zu den Komponenten $\varphi_{i,i+1}$ des zu bestimmenden LFS. Hierfür haben wir die Dgl.

$$\varphi'_{i,i+1} = p_{ii}\varphi_{i,i+1} + p_{i,i+1}\varphi_{i+1,i+1},$$

wobei wir $\varphi_{i+1,i+1} = \exp\left(\int p_{i+1,i+1}(x)dx\right)$ bereits bestimmt haben. Also liegt eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung vor, die wir ebenfalls lösen können, und zwar durch

$$\varphi_{i,i+1}(x) = c\varphi_{i,i}(x) + \varphi_{i,i}(x)\int p_{i,i+1}(x)\frac{\varphi_{i+1,i+1}(x)}{\varphi_{i,i}(x)}dx.$$

Systeme in Dreiecksgestalt: Elemente der weiteren Nebendiagonalen

Nun fahren wir fort mit den Einträgen der 2., 3. usw. oberen Nebendiagonalen des LFS Φ, also mit $\varphi_{i,i+2}$, $\varphi_{i,i+3}$ etc.. Sind dann alle φ_{ij} für $1 \leq i \leq n$ und $i \leq j \leq i+l-1$ bestimmt, können wir die Gleichung für $\varphi_{i,i+l}$, das ist

$$\varphi'_{i,i+l} = p_{ii}\varphi_{i,i+l} + \sum_{j=i+1}^{i+l} p_{ij}\varphi_{j,i+l},$$

ebenfalls lösen, denn auch dies ist eine inhomogene lineare Dgl. erster Ordnung. Beachten Sie, dass die in der Summe auftretenden $\varphi_{j,i+l}$ in dem hier dargestellten Verfahren bereits berechnet wurden. Die Lösung ist gegeben durch

$$\varphi_{i,i+l}(x) = c\varphi_{i,i}(x) + \varphi_{i,i}(x) \sum_{j=i+1}^{i+l} \int p_{ij}(x) \frac{\varphi_{j,i+l}(x)}{\varphi_{i,i}(x)} dx.$$

Systeme in Dreiecksgestalt: Das Anfangswertproblem

Durch passende Wahl der Integrationsgrenzen können wir auf diese Weise auch ein LFS $Y = (y_{ij})$ erhalten mit $Y(x_0) = E_n$. Dazu wählen wir

$$y_{ii}(x) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} p_{ii}(t)dt \Big)$$

so dass $y_{ii}(x_0) = e^0 = 1$, und, für $l \geq 1$

$$y_{i,i+l}(x) = y_{ii}(x) \sum_{j=i+1}^{i+l} \int_{x_0}^{x} p_{ij}(t) \frac{\varphi_{j,i+l}(t)}{\varphi_{i,i}(t)} dt,$$

so dass $y_{i,i+l}(x_0) = 0$ für $l \geq 1$.

Ein (etwas umfangreicheres) Beispiel

Wir bestimmen ein LFS Y von $y' = Py$ mit $Y(0) = E_3$ für

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-x} & 4 \\ 0 & 2 & xe^{-x} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix-Dgl. $Y' = PY$ lautet mit dem Ansatz von Y als rechter oberer Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & e^{-x} & 4 \\ 0 & 2 & xe^{-x} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Dgln. für die Diagonalelemente y_{kk}, $k \in \{1, 2, 3\}$ lauten

$$y'_{kk} = k y_{kk}$$

mit den Lösungen $y_{kk}(x) = c_k e^{kx}$, wobei wir $c_k = 1$ wählen, um $y_{kk}(0) = 1$ zu erreichen.

Fortsetzung des Beispiels

Die DgIn. für die Komponenten der ersten oberen Nebendiagonalen sind

$$y_{12}'(x) = y_{12}(x) + e^{-x} y_{22}(x) = y_{12}(x) + e^{x},$$

letzteres, da $y_{22}(x) = e^{2x}$ bereits berechnet war, und

$$y_{23}'(x) = 2y_{23}(x) + xe^{-x} y_{33}(x) = 2y_{23}(x) + xe^{2x}.$$

Die allgemeinen Lösungen hiervon sind

$$y_{12}(x) = c_{12} e^{x} + e^{x} \int \frac{e^{x}}{e^{x}} dx = \tilde{c}_{12} e^{x} + xe^{x}$$

und

$$y_{23}(x) = c_{23} e^{2x} + e^{2x} \int \frac{xe^{2x}}{e^{2x}} dx = \left(\tilde{c}_{23} + \frac{x^2}{2}\right) e^{2x}.$$

Fortsetzung des Beispiels (2)

Um $y_{12}(0) = y_{23}(0) = 0$ zu erreichen, wählen wir $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{23} = 0$ und erhalten damit

$$y_{12}(x) = xe^x \qquad \text{sowie} \qquad y_{23}(x) = \frac{x^2}{2} e^{2x}.$$

Schließlich ist noch y_{13} zu bestimmen als Lösung der Dgl.

$$y_{13}'(x) = y_{13}(x) + e^{-x} y_{23}(x) + 4y_{33}(x) = y_{13}(x) + \frac{x^2}{2} e^x + 4e^{3x}.$$

Durch die zusätzliche Forderung $y_{13}(0) = 0$ ist die Lösung eindeutig bestimmt. Sie ist gegeben durch

$$y_{13}(x) = \frac{x^3}{6} e^x + 2(e^{3x} - e^x).$$

Betrachten Sie es als Übungsaufgabe, dies mit Hilfe der Lösungsformel für die inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung herzuleiten.

Ergebnis

Zusammenfassend erhalten wir als Lösung von $Y' = PY$ mit $Y(0) = E_3$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & \frac{x^3}{6}e^x + 2(e^{3x} - e^x) \\ 0 & e^{2x} & \frac{x^2}{2}e^{2x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Abschließende Bemerkung über Systeme in Dreiecksgestalt

Das oben dargestellte Verfahren ist auch in der folgenden, etwas allgemeineren Situation anwendbar:

Gegeben seien $P, R \in C(I; M_n(\mathbb{K}))$ und eine *von x unabhängige*, reguläre Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$, so dass folgendes gilt:

(1) $AP(x)A^{-1} = R(x)$ für alle $x \in I$,

(2) $R(x)$ ist für jedes $x \in I$ eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Dann kann man ein LFS $\Phi \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ des Dgl.-Systems $y' = Py$ in folgender Weise gewinnen:

Abschließende Bemerkung

(i) Man multipliziert das System $y' = Py$ mit A und erhält

$$Ay' = APy = APA^{-1}Ay = RAy,$$

so dass sich für $z = Ay$ (woraus $z' = Ay'$ folgt, weil A nicht von x abhängt) das System $z' = Rz$ in Dreiecksgestalt ergibt.

(ii) Man bestimmt ein LFS $\Psi \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ von $z' = Rz$ nach dem oben dargestellten Verfahren.

(iii) $\Phi := A^{-1}\Psi$ ist dann ein LFS des ursprünglichen Systems $y' = Py$.

Beispiel

Betrachten wir den Fall zweier Gleichungen und einer Koeffizientenmatrix der Gestalt

$$P(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ g(x) & f(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{kurz:} \qquad P = \begin{pmatrix} f & g \\ g & f \end{pmatrix}.$$

Man setzt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{so dass} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhält nach einigen Matrizenmultiplikationen, die zur Übung empfohlen seien,

$$APA^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} f-g & 0 \\ 0 & f+g \end{pmatrix} =: R,$$

wobei R in diesem Fall sogar Diagonalgestalt hat. b.w.

Fortsetzung des Beispiels

Sind F und G Stammfunktionen von f und g, so ist ein LFS Ψ der transformierten Gleichung

$$z' = Rz = \begin{pmatrix} f-g & 0 \\ 0 & f+g \end{pmatrix} z$$

gegeben durch

$$\Psi = \begin{pmatrix} \exp(F-G) & 0 \\ 0 & \exp(F+G) \end{pmatrix} = \exp(F) \begin{pmatrix} \exp(-G) & 0 \\ 0 & \exp(G) \end{pmatrix}.$$

Ein LFS Φ des ursprünglichen Systems $y' = Py$ finden wir dann mit

$$\Phi = A^{-1}\Psi = \frac{\exp(F)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-G) & 0 \\ 0 & \exp(G) \end{pmatrix} = \dots$$

Fortsetzung des Beispiels

$$.. = \frac{\exp(F)}{2}\begin{pmatrix} \exp(-G) & \exp(G) \\ -\exp(-G) & \exp(G) \end{pmatrix} =: (\varphi_1, \varphi_2).$$

Bilden wir noch die Linearkombinationen $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\varphi_2 - \varphi_1$, so erhalten wir

$$\widetilde{\Phi} = (\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_2 - \varphi_1) = \exp(F)\begin{pmatrix} \cosh(G) & \sinh(G) \\ \sinh(G) & \cosh(G) \end{pmatrix}.$$

Dies hat für die spezielle Wahl $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ und $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ mit $F(x_0) = G(x_0) = 0$ den Vorteil, dass $\widetilde{\Phi}(x_0) = E_2$, so dass die Lösung des AWP $y' = Py$, $y(x_0) = y_0$ berechnet werden kann zu

$$y(x) = \widetilde{\Phi}(x)y_0.$$