Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2010/11
17.12.2010

Test zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

   a) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge A eines metrischen Raumes ist kompakt. (+2/-1 P.)

   b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig. (+2/-1 P.)

   c) Auf dem $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent. (+2/-1 P.)

   d) Die Jacobi-Matrix einer stetig partiell differenzierbaren Abbildung $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist symmetrisch. (+2/-1 P.)

   e) Jede partiell differenzierbare Funktion ist stetig. (+2/-1 P.)

2. Bestimmen Sie (ohne Beweis) $\overline{M}, M^\circ$ und ∂M für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^2$:

   a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2 + 9y^2 \leq 1\}$ (3 P.)

   b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{Z}, \ y \in \mathbb{Q}\}$ (3 P.)

3. Berechnen Sie $L_a^b(\gamma)$ für $0 \leq a < b$ und $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (Neil'sche Parabel). (5 P.)

4. Für die Funktion
$$f: \ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x) = \ln(|x|)$$
   berechne man die ersten und zweiten partiellen Ableitungen und zeige, dass $\Delta f(x) = 0$. (7 P.)

5. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$. Zeigen Sie, dass f konform ist. (8 P.)