Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2010/11
04.02.2011

2. Test zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:
   a) Die Gesamtheit aller Lösungen $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Differenzialgleichung $y' = x^2y + 3$ bildet einen eindimensionalen Vektorraum. (+2/-1 P.)
   b) Durch $\operatorname{dist}(A, B) := \inf \{|x - y| : x \in A, y \in B\}$ wird eine Metrik auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert. (+2/-1 P.)
   c) Es existiert ein metrischer Raum (X, d), der genau drei Teilmengen besitzt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. (+2/-1 P.)
   d) Ist $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $P : K \to \mathbb{R}$ definiert durch $P(x, y) := x^2 - y^2$, so nimmt P ihr Maximum auf dem Rand von K an. (+2/-1 P.)
2. Formulieren Sie den Satz über inverse Abbildungen präzise und vollständig. (5 P.)
3. Die Funktion $P : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei gegeben durch
   $$P(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4xy(x^2 - y^2)).$$
   Zeigen Sie, dass P überall lokal, aber nicht global invertierbar ist. (8 P.)
4. Berechnen Sie den Abstand der Ellipse
   $$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$$
   zum Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 0)$. (6 P.)
5. Bestimmen Sie alle positiven Lösungen der Bernoullischen Differenzialgleichung
   $$y' = \frac{y}{1 + x} + (1 + x)y^3.$$
   Hinweis: Eine partikuläre Lösung der entsprechenden inhomogenen linearen Gleichung erhalten Sie durch den Ansatz $z(x) = \lambda(1 + x)^\alpha$. (8 P.)