3.4 Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir untersuchen das Anfangswertproblem

$$y(x_0) = y_0 \qquad (x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{K}^n)$$

für ein System gewöhnlicher Dgln. 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y(x)) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y(x)) \end{aligned}, \quad \text{kurz: } y' = f(x,y)$$

Differenzialgleichung und Anfangsbed. zusammen werden wir im folgenden als Anfangswertproblem bezeichnen, also:

$$y(x_0) = y_0\ ,\ y' = f(x,y) \qquad \text{(AWP)}$$

Von der rechten Seite sei zunächst nur vorausgesetzt, dass sie stetig sei, genauer:

$f: I \times A \to \mathbb{K}^n$ stetig, dabei

$I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $x_0 \in I$

$A \subset \mathbb{K}^n$ abgeschlossen mit $y_0 \in A$.

Ziel: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $y \in C^1(I, A)$ von (AWP) (sogenannte "globale Lösung", existiert auf dem ganzen Intervall I) oder zumindest einer "lokalen Lösung". D.h. es existiert ein Teilintervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$, so dass es genau eine Lösung $y \in C^1(I_0, A)$ von (AWP) gibt.

Hilfsmittel: Fixpunktsatz von Weissinger.

Ist (X,d) vollständig metrisch, $F: X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$d(F^k(x), F^k(y)) \le \alpha_k \, d(x,y),$$

wobei $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$ ist. Dann besitzt die Abbildung F genau einen Fixpunkt (d.i. eine Lösung x_* der Gleichung $F(x_*) = x_*$)

Auf welche Abbildung F läßt sich der Fixpunktsatz anwenden? Dazu müssen wir vom Anfangswertproblem (AWP) zur äquivalenten Integralgleichung übergehen:

Lemma 1: $y \in C^1(I, A)$ ist genau dann eine Lösung von (AWP), wenn für alle $x \in I$ gilt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt =: F(y)(x) \qquad \text{(Igl.)}.$$

Bew.: Integration der Dgl. in (AWP) von x_0 bis x ergibt $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$. Mit der Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$ folgt (Igl.).

Umgekehrt: Ist $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$, so ist $y(x_0) = y_0$ und nach dem Hauptsatz

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt = f(x, y(x)). \qquad \square$$

Bem.: Für die Implikation (Igl.) $\Rightarrow$ (AWP) reicht offenbar die Voraussetzung $y \in C(I, A)$. Die stetige Differenzierbarkeit ist dann eine Folgerung.

Um einen Fixpunkt der Abbildung

$$F : C(I,A) \to C(I,A), \; y \mapsto F(y)$$

(wie in (Igl.) definiert) zu konstruieren, nehmen wir an, dass <u>I kompakt</u> ist, und versehen $C(I,A)$ mit der Metrik

$$d(y,z) := \|y-z\| := \sup\{|y(x)-z(x)| : x \in I\}.$$

Dann ist $(C(I,A), d)$ ein vollständiger metrischer Raum (als abgeschlossener Teilraum von $C(I, \mathbb{K}^n)$).

Zum Nachweis der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes ist die Stetigkeit der Funktion f allein <u>nicht</u> ausreichend. Wir müssen darüber hinaus verlangen, daß f der Lipschitz-Bedingung

$$\exists\, L > 0, \text{ so daß } |f(x,y) - f(x,z)| \le L\,|y-z| \quad \forall x \in I,\; y,z \in \mathbb{K}^n \qquad (L)$$

genügt. Damit können wir zeigen:

Lemma 2: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall der Länge $|I|$, $A \subset \mathbb{K}^n$, $x_0 \in I$ und $y_0 \in A$. Die Funktion

$$f : I \times A \to \mathbb{K}^n$$

sei stetig, genüge der Lipschitzbedingung (L) und es gelte

$$F(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \in A \quad \forall y \in C(I, A).$$

Dann ist $F : C(I,A) \to C(I,A)$ wohldefiniert und es gelten die Abschätzungen

$$|F^k(y)(x) - F^k(z)(x)| \leq L^k \frac{|x-x_0|^k}{k!} \|y-z\|$$

sowie

$$\| F^k(y) - F^k(z)\| \leq L^k \frac{|I|^k}{k!} \|y-z\|.$$

Bew.: (1) Wohldef.: Wg. $y(x) \in A$ $\forall x \in I$ ist $f(x, y(x))$ für $x \in I$ definiert und die Abbildung

$$x \longmapsto f(x, y(x))$$

stetig. Also existiert $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$. Ferner: $F(y)(x) \in A$ $\forall x \in I$ (nach Voraussetzung!) und

$$F(y)(x) - F(y)(x') = \int_{x}^{x'} f(t, y(t))\,dt \to 0 \quad (x - x' \to 0)$$

Damit ist $F(y) \in C(I, A)$.

(2) Beweis der ersten Abschätzung (die zweite folgt daraus durch Supremumsbildung): Induktion über k, wobei für $k=0$ nichts zu zeigen ist.

$k \to k+1$: $|F^{k+1}(y)(x) - F^{k+1}(z)(x)|$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, F^k(y)(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, F^k(z)(t))\,dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, F^k(y)(t)) - f(t, F^k(z)(t)|\,dt$$

$$\underset{(L)}{\leq} L \int_{x_0}^{x} |F^k(y)(t) - F^k(z)(t)|\,dt$$

$$\underset{\text{I.V}}{\leq} L^{k+1} \int_{x_0}^{x} \frac{|t-x_0|^k}{k!} \underbrace{dt}_{\|y-z\|} = L^{k+1} \frac{|t-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \|y-z\|. \quad \square$$

Zuerst wenden wir das Lemma mit $A = \mathbb{K}^n$ an.

Satz 1 (globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf). Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Die Funktion

$$f: I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

sei stetig und genüge der Lipschitzbedingung (L) (für alle $x \in I$, $y, z \in \mathbb{K}^n$). Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ von (AWP).

Bew.: Die Voraussetzungen von Lemma 2, also

$$F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \in \mathbb{K}^n$$

und (L) für alle $x \in I$, $y, z \in \mathbb{K}^n$, sind erfüllt.

Die Abbildung $F : C(I, \mathbb{K}^n) \to C(I, \mathbb{K}^n)$

genügt also den Abschätzungen

$$\| F^k(y) - F^k(z) \| \leq \frac{(L|I|)^k}{k!} \|y - z\| \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

wobei $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L|I|)^k}{k!} = \exp(L|I|) < \infty$.

Da $C(I, \mathbb{K}^n)$ vollständig ist, existiert nach dem FPS von Weissinger genau eine Lösung $y \in C(I, \mathbb{K}^n)$ der Gleichung $y = F(y)$, also von Igl.. Diese löst (AWP) und ist stetig d'bar (Lemma 1 und Nachbemerkung). □

Bem.: Ist die Funktion f in Satz 1 sogar auf $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ stetig und genügt auf jedem kompakten Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$ einer Lipschitzbedingung, so existiert genau eine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ von (AWP). Denn Satz 1 liefert dann für jedes kompakte Teilintervall eine Lösung, d.h.: y ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Als Spezialfall ergibt sich der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme 1. Ordnung, der in 3.2 bereits verwendet wurde:

Satz 2: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$, $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$ und $Q \in C(I, \mathbb{K}^n)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = Py + Q \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Bew.: Sei $f(x,y) = P(x)y + Q(x)$. Dann ist $f \in C(I \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ und es gilt

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq \|P(x)\| \, |y-z| \leq \sup_{x \in I} \|P(x)\| \, |y-z|.$$

Mit $L := \sup_{x \in I} \|P(x)\|$ ist also die Lipschitzbed. (L) für alle $x \in I$, $y, z \in \mathbb{K}^n$ erfüllt. Satz 1 liefert die Behauptung. $\square$

Folgerung: Sind $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$, $Q \in C(I, \mathbb{K}^n)$ für ein beliebiges Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$, so existiert eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ des AWP $y' = Py + Q$, $y(x_0) = y_0$. Diese ist eindeutig bestimmt.

Bem. + Bsp.: (1) Satz 1 findet auch bei einer Reihe nichtlinearer Probleme Anwendung, nämlich immer dann, wenn die rechte Seite einer globalen Lipschitzbedingung genügt. z.B. besitzt auch das AWP

P.L. (8)

$f(x_0) = y_0$ für das nichtlineare Dgl.-System

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik} y_k) \qquad (1 \le i,k \le n)$$

eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$. Denn für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, def. durch $f_i(y) = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik} y_k)$ gilt die Abschätzung

$$|f(y) - f(z)| \le \Big(\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} |y-z| ,$$

wie wir in der Übung gezeigt haben. Also ist die Lipschitz-bedingung hier für alle $x \in \mathbb{R}$, $y,z \in \mathbb{R}^n$ mit $L^2 = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2$ erfüllt, und Satz 1 liefert die Beh..

(2) Bereits einfache Beispiele zeigen, dass wir keine globalen Lösungen erwarten können, wenn die Lipschitzbedingung nur lokal erfüllt ist (d.h. nur für y,z aus einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{K}^n$). Bsp.

$$y' = y^2 \quad ; \quad y(0) = 1 \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ und } n=1)$$

Hier ist $f(x,y) = y^2$. Diese Funktion ist Lipschitz-stetig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$, aber nicht auf ganz $\mathbb{R}$. Das AWP ist durch Separation lösbar

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = x + C \Rightarrow \frac{1}{y(x)} = -(x+C) \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x+C}$$

$$\underset{y(0)=1}{\Longrightarrow} \quad y(x) = \frac{1}{1-x}.$$ Die Lösung existiert nicht auf ganz $\mathbb{R}$, sondern nur auf $(-\infty, 1)$.

Aus diesem Grund ist auch eine lokale Variante von Satz 1 von Interesse. Dazu wählen wir in Lemma 2:

$A := \overline{B_R(y_0)}$ (mit einem beliebigen Radius R)

und setzen

$M := \sup \{ |f(x,y)| : x \in I, y \in A \}$

sowie

$h := \frac{R}{M}$ (Lebensdauer der Lösung) und $I_0 := [x_0 - h, x_0 + h] \cap I$.

Diese Wahl ist so getroffen, daß für $y \in C(I_0, A)$ gilt

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\,dt$$

$$\leq |x - x_0| \cdot \sup \{ |f(x,y)| : x \in I, y \in A \} \leq h \cdot M = R$$

falls $x \in I_0$!

Damit ist die in Lemma 2 zuletzt genannte Voraussetzung, nämlich: $F(y)(x) \in A \;\; \forall x \in I_0,\; y \in C(I_0, A)$, erfüllt. Wie im Beweis von Satz 1 erhält man:

<u>Satz</u> 3 (lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf): Es seien $y_0 \in \mathbb{K}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ ein kompaktes Intervall. $f : I \times \overline{B_R(y_0)} \to \mathbb{K}^n$ sei stetig und genüge auf $I \times \overline{B_R(y_0)}$ der Lipschitzbedingung (L). Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I_0, \overline{B_R(y_0)})$ von (AWP).

Bem. zur Lebensdauer h (nicht exakt, da $I_0 = [x_0-h, x_0+h] \cap I$!)

(i) h ist unabhängig von der Lipschitzkonstanten L (um dies zu erreichen, haben wir den FPS von Weissinger anstelle des Banachschen FPS verwendet!)

(ii) Mit $h = \frac{R}{M}$ ist die Lebensdauer der Lösung (oder zumindest eine untere Schranke hierfür) quantifiziert.

Hierbei ist allerdings

$$M = \sup\{|f(x,y)| : x \in I,\ y \in \overline{B_R(y_0)}\} = M(R, I, y_0, x_0).$$

Um dem Satz eine möglichst große Lebensdauer zu entnehmen, hat man im Einzelfall ggf. noch eine Optimierungsaufgabe zu lösen (I und R sind ja noch wählbar!)

Bsp.: $y'(x) = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0 \qquad$ (also $x_0 = y_0 = 0 \in \mathbb{R}$)

Wir setzen $I = [-a, a]$ an und erhalten

$M = \sup\{x^2+y^2 : |x| \le a, |y| \le R\} = a^2 + R^2$,

also $h = \frac{R}{a^2+R^2} =: h_a(R)$ (a fassen wir als Parameter auf!)

Dann wird h_a extremal $\Leftrightarrow h_a'(R) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{a^2+R^2} - \frac{2R^2}{(a^2+R^2)^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow a = R$$

und dies ist tatsächlich ein Max. ($h_a(R) \to 0$ für $R \to \infty$ und $h_a(0) = 0$). Wählen wir also $a = R$, erhalten wir $h = \frac{a}{2a^2} = \frac{1}{2a}$. Die tatsächliche Lebensdauer ergibt sich dann zu $T = \min(a, \frac{1}{2a}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zwei Aspekte der Sätze 1 und 3 sollen abschließend noch anhand von Beispielen diskutiert werden.

1. Die Lipschitzbedingung (L) ist notwendig für die Eindeutigkeit der Lösung.

Bsp. $y'(x) = |y(x)|^\alpha \,,\ y(0) = 0 \qquad (0 < \alpha < 1)$

Hier ist die rechte Seite der Dgl. lediglich Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1)$, aber nicht mehr Lipschitz-stetig. In diesem Fall geht die Eindeutigkeit der Lösung des AWPs verloren!

1. $y(x) \equiv 0$ ist offenbar eine Lösung der Dgl., die auch der Anfangsbedingung genügt.
2. Eine zweite, nichttriviale Lösung erhalten wir durch Separation:

$$y'(x) = |y(x)|^\alpha \implies x = \int_0^x dx = \int_0^x \frac{y'(x)}{|y(x)|^\alpha}\,dx$$

$$= \int_0^{y(x)} |y|^{-\alpha}\,dy = \frac{1}{1-\alpha}\, y(x)^{1-\alpha}$$

falls $y \geq 0$

Für $x \geq 0$ ergibt die Auflösung nach y:

$$y(x) = \left((1-\alpha)\,x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

3. Beliebig viele weitere Lösungen erhält man jetzt durch Stückeln: Für jedes $c \geq 0$ ist

$$y_c(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq c \\ \left((1-\alpha)(x-c)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} & ; x \geq c \end{cases}$$

eine Lösung der Dgl., die der Anfangsbedingung genügt.

2. Die Picard-Iteration

Beim Beweis des FPS von Weissinger wird gezeigt, dass die Folge der Iterierten

$$\left(F^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = (x_0, F(x_0), F(F(x_0)), \dots)$$

für einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in X$ konvergiert.

Wie sieht die Folge der Iterierten für unsere spezielle Abbildung

$$F: C(I,A) \longrightarrow C(I,A), \quad F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

aus? Dazu wählen wir als Startpunkt die besonders einfache Funktion

$$y_{(0)}(x) := y_0 \in A, \text{ so daß } y_{(0)} \in C(I,A)$$

Dann ist

$$F(y_{(0)})(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{(0)}(t))\,dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt =: y_{(1)}(x)$$

die erste Iterierte. Im nächsten Schritt haben wir

$$y_{(2)}(x) := F(y_{(1)})(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{(1)}(t))\,dt,$$

allgemein also

$$y_{(k+1)}(x) := F(y_{(k)})(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{(k)}(t))\,dt.$$

Dies liefert ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen des AWP $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, das als <u>Picard-Iteration</u> bezeichnet wird.

Bsp.: Näherungslösung für die Riccati-Dgl.

$$y'(x) = x^2 + y(x)^2 \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(0)=0.$$

Wir starten mit

$y_{(0)}(x) = y_0 = 0$ und haben als erste Iterierte

$$y_{(1)}(x) = \underbrace{y_0}_{=0} + \int_{x_0=0}^{x} t^2 + \underbrace{y_0^2}_{=0}\, dt = \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3}.$$

Als nächstes erhalten wir (gleich mit $y_0 = x_0 = 0$!)

$$y_{(2)}(x) = \int_0^x t^2 + y_{(1)}(t)^2\, dt = \int_0^x t^2 + \frac{t^6}{9}\, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7\cdot 9}$$

Die dritte Iterierte kann man gerade noch händisch schaffen:

$$y_{(3)}(x) = \int_0^x t^2 + (y_{(2)}(t))^2\, dt = \int_0^x t^2 + \underbrace{\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7\cdot 9}\right)^2}_{= \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{3\cdot 7\cdot 9} + \frac{t^{14}}{(7\cdot 9)^2}} dt$$

$$\Rightarrow \quad y_{(3)}(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7\cdot 9} + \frac{2x^{11}}{3\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \frac{x^{15}}{(7\cdot 9)^2\cdot 15}$$

In diesem Fall erhalten wir nicht nur Näherungswerte, sondern erfahren auch etwas über die Struktur der Lösung. Diese ist in eine Potenzreihe entwickelbar, wobei $y(x) = \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{4k} = \frac{x^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{4k+3}$.

Geht man damit in die Dgl. ein, erhält man auch eine Rekursionsformel für die Koeffizienten α_k.

Dies ergibt $\alpha_0 = \frac{1}{3}$, $\alpha_k = \frac{1}{3+4k} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-1-j}\alpha_j \quad (k \geq 1)$

woraus man leicht $\alpha_k \leq \frac{1}{3+4k}$ und damit den Konvergenzradius $R \geq 1$ dieser Reihe herleitet.

In besonders einfachen Fällen lässt sich die Lösung sogar anhand der ersten Iterierten erraten:

Bsp.: $y'(x) = f(x) \qquad y(x_0) = y_0 \qquad$ (trivial!)

$$\Rightarrow y_{(0)}(x) = y_0, \quad y_{(1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = y_{(k)}(x) \quad \forall k \geq 2,$$

und das ist ja tatsächlich auch die Lösung. Hier ist man nach einer Integration bereits fertig.

Bsp.: $y'(x) = p(x) \cdot y(x)$ (homogene lineare Gleichung erster Ordnung)

$y(x_0) = y_0$

Wir wissen: $y(x) = y_0 \cdot \exp(P(x))$, $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$ ist die exakte Lösung. Führt uns die Picard-Iteration auch zu diesem Ergebnis?

$$y_{(0)}(x) = y_0 \,; \quad y_{(1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y_0\, p(t)\,dt = y_0(1 + P(x))$$

$$y_{(2)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p(t)\, y_{(1)}(t)\,dt = y_0 + y_0 \int_{x_0}^{x} p(t) + P(t)p(t)\,dt$$

$$= y_0\left(1 + P(x) + \frac{P(x)^2}{2}\right)$$

Per Induktion kann man jetzt zeigen, daß

$$y_{(n)}(x) = y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x)^k}{k!},$$

woraus sich im Grenzübergang $n \to \infty$ wieder das bekannte Ergebnis

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_{(n)}(x) = y_0 \cdot \exp(P(x))$$

ergibt.