Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2016/17
16.02.2017

Klausur zu Analysis II

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Partielle Ableitungen)	12 Punkte
A3 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)	10 Punkte
A4 (Extremwertaufgabe)	11 Punkte
A5 (Kettenregel)	7 Punkte
A6 (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)	11 Punkte
A7 (Inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung)	7 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 32 (von 68 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 25 Punkten. Viel Erfolg!

X

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Sind $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist auch $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ offen.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Ist durch $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x)$ eine Folge integrierbarer Funktionen gegeben, die in jedem $x \in [a,b]$ gegen Null konvergiert, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Jacobi-Matrix einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist symmetrisch.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Lösung der Differenzialgleichung

   $$y'' + py' + qy = 0$$

   mit $p, q \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, und gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, so ist $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

X

2. **(4+3+2+3 P.)** Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto F(x)$, mit

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 + 2x_1x_3, x_3^2 + 2x_1x_2, x_1^2 + 2x_2x_3).$$

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $F(x) = \nabla\varphi(x)$. (φ ist bis auf eine absolute, additive Konstante eindeutig bestimmt.)

(b) Für die Funktion φ aus Teil (a) berechne man die Richtungsableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x_0)$ nach $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ in $x_0 = (2, 1, 0)$.

(c) Geben Sie die Definition der Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes $G : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ an, und berechnen Sie $\mathrm{rot} F(x)$ für das oben angegebene Feld F.

(d) Berechnen Sie $\Delta\varphi(x)$ (für φ aus Teil (a)), und überprüfen Sie, ob φ harmonisch ist.

x

3. **(3+1+6 P.)** Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k(x) = \dfrac{1+|x|^k}{2+|x|^{2k}}$, dabei $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm von x.

   (a) Berechnen Sie die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (punktweiser Limes).

   (b) Bestimmen Sie die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f. (Ohne Beweis).

   (c) Weiter sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge $|e| = 1$ und, für $j \in \{1, 2, 3\}$, B_j die offene Kugel vom Radius 1 um je. Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge $(f_k)_k$ auf B_j gleichmäßig gegen f konvergiert. (Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und begründen Sie diese!)

X

4. **(4+4+3 P.)** Es sei $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f genau eine kritische Stelle (x_c, y_c) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f an der Stelle (x_c, y_c).

(c) Untersuchen Sie $\mathrm{Hess} f(x_c, y_c)$ auf Definitheit und stellen Sie fest, ob in (x_c, y_c) eine Maximal- bzw. Minimalstelle oder ein Sattelpunkt vorliegt.

x

5. **(7 P.)** Es sei $y : (0, \sqrt[3]{4}) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) Für alle $x \in (0, \sqrt[3]{4})$ gilt $x^3 + y(x)^3 = 3xy(x)$,

   (b) es gibt genau eine globale Maximalstelle $x_0 \in (0, \sqrt[3]{4})$ von y.

   Bestimmen Sie x_0 und berechnen Sie $y(x_0)$.

X

6. **(5+6 P.)** Es seien $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{und} \quad x + 3y \leq 10\}$ sowie

$$f : K \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y^3.$$

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f ihr (globales) Maximum annimmt, und zwar auf dem Teil des Randes ∂K, wo $x + 3y = 10$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\max\{f(x, y) : (x, y) \in K\}$.

X

7. **(7 P.)** Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(1) = 2$ für die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = \frac{7}{x} y(x) + 3x^3.$$