Lösung + Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
09.10.2020

2. Klausur zu Analysis II

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Skalarprodukt)	10 Punkte
A3 (Jacobi-Matrix)	10 Punkte
A4 (Offene und abgeschlossene Mengen)	8 Punkte
A5 (Extremwertaufgabe)	13 Punkte
A6 (Bernoullische Dgl. und Verwandtes)	11 Punkte
A7 (Lösungsfundamentalsystem)	8 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 70 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Jede konforme Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) ist überall lokal invertierbar.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Jede stetige und partiell differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig partiell differenzierbar.

   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so wird durch $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ eine Metrik auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.

   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so existieren $a \in A$ und $b \in B$, so dass $\inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} = |a - b|$.

   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Jede stetig partiell differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig und partiell differenzierbar.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(4+1+5=10 P.)** Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

   (a) Geben Sie die vollständige Definition des Begriffs "Skalarprodukt auf V" an.

   (b) Was versteht man unter einem Euklidischen Vektorraum? (Den Begriff Vektorraum müssen Sie an dieser Stelle *nicht* erläutern.)

   (c) Folgern Sie aus den in (a) von Ihnen angegebenen definierenden Eigenschaften die nachstehende sogenannte *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

   (Hierbei ist $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ die vom Skalarprodukt auf V induzierte Norm.)

(a) Eine Abbildung $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt ein Skalarprodukt, 1P.
wenn: (i) $\langle x, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in V$ und "=" genau dann, wenn $x = 0$, 1P.
(ii) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle \ \forall x, y, z \in V, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 1P.
(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \ \forall x, y \in V$. 1P.

(b) Ein Paar $(V, \langle \, , \, \rangle)$ bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt (wie in (a)). 1P.

(c) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \underset{(ii)}{=} \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$

$\underset{(ii) \text{ und } (iii)}{=} \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \underset{(iii)}{=} \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ 2P.

Mit $-y$ anstelle von y.

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, -y\rangle + \|-y\|^2 \underset{(ii), (iii)}{=} \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ 2P.

Addition ergibt die Beh. 1P.

3. **(4+2+2+2=10 P.)** Bestimmen Sie eine total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ mit der Jacobi-Matrix

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -x & y \end{pmatrix}.$$

Ist diese Funktion

(a) konform, (b) überall lokal invertierbar, (c) injektiv?

Mit $f = (f_1, f_2)$ haben wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} = y &\implies f_1(x,y) = xy + c(y) \quad (1P) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = x &\implies f_1(x,y) = xy + \tilde{c}(x) \end{aligned}\right\} \implies f_1(x,y) = xy + C_1 \quad (1P)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x} = -x &\implies f_2(x,y) = -\frac{x^2}{2} + c(y) \quad (1P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = y &\implies f_2(x,y) = \frac{y^2}{2} + \tilde{c}(x) \end{aligned}\right\} \implies f_2(x,y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C_2 \quad (1P)$$

(a) Ja, $\longrightarrow$ (1P), denn

$$Df(x,y)^T\, Df(x,y) = \begin{pmatrix} y & -x \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ -x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix} = (x^2+y^2) E_2 \quad (1P)$$

(b) Ja, $\longrightarrow$ (1P), weil

$$\det Df(x,y) = x^2 + y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$ (Satz über inverse Abbildungen) (1P)

(c) Nein, $\longrightarrow$ (1P) denn

unabhängig von den Integrationskonstanten ist

$$f(x,y) = f(-x,-y). \quad (1P)$$

Bem.: Zur Beantwortung von (a) und (b) ist die Kenntnis von f selbst nicht erforderlich. Es reicht, Df zu kennen.

4. **(2+(2+2+2)=8 P.)** Geben Sie die Definitionen der Begriffe "offen" und "abgeschlossen" für Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) an und entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (versehen mit der Euklidischen Norm) offen bzw. abgeschlossen sind. (Eine Begründung ist *nicht* erforderlich.)

   (a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + y^2 > e^{\frac{1}{x}}\}$,

   (b) $M_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$,

   (c) $M_3 = \{(n, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

$M \subset (X,d)$ heißt offen, falls gilt: $\forall x \in M \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset M$. 1P.

$M \subset (X,d)$ " abgeschlossen, wenn M^c offen ist. 1P.

(a) M_1 ist offen 1P und nicht abgeschlossen 1P.

(b) M_2 ist weder offen 1P noch abgeschlossen 1P.

(c) M_3 ist abgeschlossen 1P und nicht offen 1P.

5. **(13 P.)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen des Polynoms

$$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto P(x,y)=\frac{x^3}{3}+3x^2+2xy+y^2-x+4y$$

und untersuchen Sie, ob es sich dabei um lokale Maximal- bzw. Minimalstellen oder um Sattelpunkte handelt. Nimmt P ein globales Extremum an? (Begründung!)

$\nabla P(x,y) = (x^2+6x+2y-1,\ 2x+2y+4)$ 2P.

$\nabla P(x,y) = (0,0)$ 1P.

$\iff 2y = -4-2x$ und $x^2+4x-5=0$

$\iff y=-2-x$ und $x \in \{-2\pm 3\} = \{-5, 1\}$ 1P.

Ergibt also 2 kritische Stellen: $(x_1,y_1) = (-5,3) \longrightarrow$ 1P.

und $(x_2,y_2) = (1,-3)$ $\longrightarrow$ 1P.

bis hierher: 6P.

$\text{Hess}\,P(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ 2P.

(davon einen für korrektes $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y)$!)

In (x_1,y_1): $\text{Hess}\,P(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ mit der Determinante

$\det\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -12 < 0$ $\longrightarrow$ 1P.

Also ist $\text{Hess}\,P(x_1,y_1)$ indefinit und damit liegt kein Extremum vor. $\longrightarrow$ 1P.

In (x_2,y_2): $\text{Hess}\,P(x_2,y_2) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det(\ldots) = +12 > 0$ 1P.

Also liegt in $(x_2,y_2) = (1,-3)$ ein lokales Min. vor. $\longrightarrow$ 1P.

Zusatz: Nein, wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x,y) = \pm\infty$ $\longrightarrow$ 1P.

für jedes feste y, hier reicht auch $y=0$.

6. **(3+2+6=11 P.)** (Die Bernoullische und eine verwandte Dgl.)

(a) Ergänzen Sie den folgenden kurzen Text an den durch .... gekennzeichneten Stellen:

Unter einer Bernoullischen Dgl. versteht man die Gleichung

$$y' = \dots p\,y + q\,y^{\alpha} \dots$$ 1P.

mit $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Sie wird durch den Ansatz

$$z = \dots y^{1-\alpha} \dots$$ 1P.

in eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung überführt. Die Dgl. für z lautet

$$z' = \dots (1-\alpha)\,(p z + q) \dots$$ 1P.

(b) Nun sei die Dgl.

$$y' = py + qy \ln(y)$$

mit $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ gegeben. Finden Sie für positive Lösungen y eine geeignete Transformation $z = f(y)$, so dass sich für z die inhomogene lineare Dgl. $z' = p + qz$ ergibt.

Teile die Dgl. durch y: $(\ln(y))' = \frac{y'}{y} = p + q \cdot \ln(y)$ 1P.

ergibt also für $z = \ln(y)$ genau die angegebene Dgl. 1P.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = \frac{1}{e}$ für die Dgl.

$$y' = y - y \ln(y).$$

Existiert der $\lim_{x \to \infty} y(x)$? Falls ja, bestimmen Sie diesen Grenzwert.

Nach (b) lautet die Dgl. für $z = \ln(y)$: $z' = 1 - z$ 1P.

Mit der speziellen Lösung $z_p(x) \equiv 1$ 1P.

und der allg. Lösung $z_h(x) = C \cdot e^{-x}$ $(C > 0)$ der hom. Gl. $z' = -z$. 1P.

Also $z(x) = 1 + Ce^{-x}$ und $y(x) = e^{z(x)} = \exp(1 + Ce^{-x})$. 1P.

$\frac{1}{e} = e^{-1} = y(0) = \exp(1 + C) \Rightarrow -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$, das

bedeutet: $y(x) = \exp(1 - 2e^{-x})$ → 1P.

Mit dem Grenzwert $\lim_{x \to \infty} y(x) = \exp(1) = e$. 1P.

2 Alternativen zu A6:

(i) Den Grenzwert kann man auch ohne Kenntnis der Lösung aus der Annahme gewinnen, dass die Lösung sich einem Gleichgewichtszustand annähert, hier also einer Konstanten, bei der sich ein "Nullwachstum" einstellt. Also hat man die Bedingung

$$0 = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y(1-\ln(y)) = \lim_{x\to\infty} 1-\ln(y)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = e.$$

(ii) Man kann die Dgl. auch durch Separation lösen:

$$\frac{dy}{y(1-\ln(y))} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y(\ln(y)-1)} = C-x$$

Subst. $z=\ln(y) \Rightarrow y=e^z \Rightarrow dy=e^z dz \Rightarrow \frac{dy}{y}=dz$

$$\Rightarrow C-x = \int \frac{dz}{z-1} = \ln(|z-1|)$$

$$\Rightarrow |z-1| = C\cdot e^{-x}$$

Da $z(0)=-1$ und also $z<1$ ist, $1-z=C\cdot e^{-x}$

bzw. $z(x)=1-C\cdot e^{-x}$ und $y(x)=\exp(1-Ce^{-x})$.

7. (8 P.) Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion und

$$P(x) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem Φ des homogenen linearen Systems $y'(x) = P(x)y(x)$, so dass $\Phi(0) = E_3$ ($E_3 = 3 \times 3$ - Einheitsmatrix).

Lös.: Es ist $P(x) = f(x)E_3 + A$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, so dass (nach einem Lemma aus der Vorl.) $[P(x), \mathbb{P}(x)] = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Das gesuchte LFS ist dann gegeben durch $\Phi(x) = \exp(\mathbb{P}(x))$, wobei $\mathbb{P}$ eine Stammfunktion von P ist, ——— 1P.

hier: $$\mathbb{P}(x) = \begin{pmatrix} \ln(\varphi(x)) & x & 0 \\ 0 & \ln(\varphi(x)) & x \\ 0 & 0 & \ln(\varphi(x)) \end{pmatrix} \quad \text{——— 2P.}$$

$$\Rightarrow \exp(\mathbb{P}(x)) = \exp(\ln(\varphi(x))E_3 + xA)$$

$$\underset{[\lambda E_3, A]=0}{=} \exp(\ln(\varphi(x)))^{E_3} \cdot \exp(xA) \quad \longrightarrow 1P.$$

$$= \varphi(x) \cdot \exp(xA) \quad \longrightarrow 1P.$$

Berechnung von $\exp(xA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k}{k!}$:

$(xA)^0 = E_3$, $(xA)^1 = xA$, $(xA)^2 = x^2A^2 = x^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(xA)^k = 0 \ \forall k \geq 3$. $\longrightarrow$ 1P.

so dass $$\exp(xA) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 1P.$$

Alltogether:

$$\Phi(x) = \varphi(x) \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $\Phi(0) = E_3$ braucht man noch $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\varphi(0)} \cdot \Phi(x)$.

Bem.: Der in der Vorlesung diskutierte Algorithmus für Dreiecksmatrizen ist ebenfalls anwendbar und führt zum selben Ergebnis.