Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2016/17
27.03.2017

2. Klausur zu Analysis II

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Kritische Punkte)	10 Punkte
A3 (Satz über implizite Funktionen)	10 Punkte
A4 (Extrema mit Nebenbedingungen)	10 Punkte
A5 (Banachscher Fixpunktsatz)	10 Punkte
A6 (Metriken)	7 Punkte
A7 (Differentialgleichungen)	7 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 64 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 23 Punkten. Viel Erfolg!

x

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Sei (a_n) eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum (X, d). Dann ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ beschränkt.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und habe ein Maximum bei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ negativ definit.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist $div(\nabla f) = 0$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Die Funktionenfolge (f_n) definiert durch $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - nx\}$ konvergiert gleichmäßig.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Seien X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Wenn der Rand ∂M in der Menge M enthalten ist, dann ist M abgeschlossen.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

x

2. **(10 P.)** Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^4 + 2z^2 + 4yz$$

und untersuchen Sie, welche davon lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

X

3. **(4+3+3 P.)** Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-6\sqrt{x^2+y^2}+8 \\ x^2+y^2+z^2-4x-2y+2 \end{pmatrix}$$

Es ist $f(3,0,1)=0$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

(b) Zeigen Sie: In einer Umgebung von $(3,0,1)$ ist das Gleichungssystem $f(x,y,z)=0$ nach y und z auflösbar. Mit anderen Worten: Es gibt eine Umgebung U von $3 \in \mathbb{R}$ und Funktionen $y,z\colon U \to \mathbb{R}$, so dass $f(x,y(x),z(x))=0$ für alle $x \in U$ gilt.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (y(x),z(x))$ im Punkt $(3,0,1)$.

x

4. **(2+3+5 P.)** Es sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ und die Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) := 4xy$.

   (a) Begründen Sie, warum die Funktion f auf der Menge M ein globales Maximum und Minimum annehmen muss.

   (b) Prüfen Sie, ob es lokale Extrema im Inneren von M gibt.

   (c) Berechnen Sie die Stellen, an denen das Maximum bzw. Minimum angenommen wird.

X

5. **(5+5 P.)**

(a) Geben Sie eine genaue Formulierung des Banachschen Fixpunktsatzes an.

(b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2 \qquad , \qquad x_2 = \frac{1}{2} e^{-x_1}$$

genau eine Lösung in $[0, \infty) \times [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$ hat.

X

6. **(3+4 P.)**

   (a) Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Metrik an.

   (b) Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

X

7. **(3+4 P.)** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = \dfrac{y}{x \cdot \ln(x)}$, $\qquad y(e) = 2,$

(b) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2}$, $\qquad y(1) = 1.$