Analysis II
Wintersemester 2016/17

# Klausur 2

## Themen

1. Multiple choice **(10 Punkte)**
2. Kritische Punkte **(10 Punkte)**
3. Satz über implizite Funktionen **(10 Punkte)**
4. Extrema mit Nebenbedingungen **(10 Punkte)**
5. Banachscher Fixpunktsatz **(10 Punkte)**
6. Metriken **(7 Punkte)**
7. Lineare Differentialgleichung **(7 Punkte)**

## Aufgabe 1 **(je (2/0/1) Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Sei $(a_n)$ eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum $(X, d)$. Dann ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ beschränkt. **wahr**

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und habe ein Maximum bei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ negativ definit. **falsch**

(c) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist $div(\nabla f) = 0$. **falsch**

(d) Die Funktionenfolge $(f_n)$ definiert durch $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1-nx\}$ konvergiert gleichmäßig. **falsch**

(e) Seien $X$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Wenn der Rand $\partial M$ in der Menge $M$ enthalten ist, dann ist $M$ abgeschlossen. **wahr**

## Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^4 + 2z^2 + 4yz$$

und untersuchen Sie, welche davon lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

**Lösung:**
Gradient von $f$: $\nabla f(x, y, z) = (4x, 4y^3 + 4z, 4z + 4y)$ **(1 Pkt.)**
Kritische Punkte:

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x = 0 \\ 4y^3 + 4z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y^3 = -z \\ y = -z \end{array} \right.$$

An einem kritischen Punkt ist also $x = 0$. Die unteren Gleichungen ergeben $y^3 = y$. Es ist entweder $y = 0$, und dann auch $z = 0$, oder $y \neq 0$ und dann $y^2 = 1$, also $y = \pm 1$ und $z = -y$. Kritische Punkte sind damit: $(0,0,0), (0,1,-1), (0,-1,1)$ **(2 Pkt.)**

Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 Pkt.)}$$

Offensichtlich hat die Hesse-Matrix den Eigenwert 4 (mit Eigenvektor z.B. $(1,0,0)^\top$) **(1 Pkt.)**

Im Punkt $(0,0,0)$ hat die Hesse-Matrix negative Determinante $4 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-16)$, sie muss also noch einen negativen Eigenwert haben. Damit ist sie indefinit und der Punkt $(0,0,0)$ ist kein Extremum **(2 Pkt.)**

In den anderen Punkten ist $y^2 = 1$ und wegen

$$det \begin{pmatrix} \lambda - 12 & -4 \\ -4 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 12)(\lambda - 4) - 16 = \lambda^2 - 16\lambda + 32 = (\lambda - (8 + 4\sqrt{2}))(\lambda - (8 - 4\sqrt{2}))$$

**(1 Pkt.)** hat die Hesse-Matrix nur positive Eigenwerte. Sie ist daher positiv definit und folglich liegen in den Punkten $(0,1,-1)$ und $(0,-1,1)$ Minima **(2 Pkt.)**

## Aufgabe 3 (4+3+3 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2 \end{pmatrix}$$

es ist $f(3,0,1) = 0$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung $U$ von $3 \in \mathbb{R}$ und Funktionen $y, z\colon U \to \mathbb{R}$, so dass $f(x, y(x), z(x))$ gilt, für alle $x \in U$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (y(x), z(x))$ im Punkt $(3,0,1)$.

**Lösung:**
**(a)** Das Differential der Funktion $f$ ist gegeben durch

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 6\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} & 2y - 6\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \\ 2x - 4 & 2y - 2 & 2z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x - 3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y - 3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & z \\ x - 2 & y - 1 & z \end{pmatrix} \quad \textbf{(4 Pkt.)}$$

**(b)** Es ist

$$Df(3,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Untermatrix $\frac{\partial f}{\partial(y,z)}(3,0,1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit den partiellen Ableitungen nach $y$ und $z$ hat Determinante 1, ist also invertierbar und daher existiert nach dem Satz über implizite Funktionen die gesuchte Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (y(x), z(x))$, die Lösungen des Gleichungssystems produziert **(3 Pkt.)**.

**(c)** Da $f(x, h(x))$ die konstante Nullfunktion ist, gilt nach Kettenregel $0 = f'(x, y(x), z(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial(y,z)}(x, h(x)) \cdot h'(x)$, also $h'(x) = -(\frac{\partial f}{\partial(y,z)})^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x))$ **(2 Pkt.)**.
Konkret ergibt dies:

$$h'(3) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 Pkt.)}$$

## Aufgabe 4 (2+3+5 Punkte)

Es sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ und die Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) := 4xy$.

(a) Begründen Sie, warum die Funktion $f$ auf der Menge $M$ ein globales Maximum und Minimum annehmen muss.

(b) Prüfen Sie ob es lokale Extrema im Inneren von $M$ gibt.

(c) Berechnen Sie die Stellen, an denen das Maximum bzw. Minimum angenommen wird.

**Lösung:**
**(a)** Die Funktion $f$ ist stetig und $M$ ist kompakt, daher nimmt sie Minimum und Maximum an **(2 Pkt.)**.
**(b)** Der Gradient ist $\nabla f(x,y) = (4x, 4y)$, also ist $\nabla f(x,y) = (4y, 4x) = 0$ genau dann wenn $x = y = 0$ **(1 Pkt.)**. Am Punkt $(0,0)$ liegt jedoch *kein* Extremum vor.
*Eine Möglichkeit, dies zu sehen:* Die Hesse-Matrix im Punkt $(0,0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 Pkt.)}.$$

Sie ist indefinit, da ihr charakteristisches Polynom $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$ ist, sie also einen positiven und einen negativen Eigenwert hat. Alternativ kann man direkt sehen, dass $(1,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist, und $(1,-1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-4$ **(1 Pkt.)**.

[*Eine andere Möglichkeit, dies zu sehen:* In jeder Umgebung von $(0,0)$ nimmt $f$ sowohl positive (z.B. wenn $x = y$) als auch negative Werte (z.B. wenn $x = -y$) an *(dafür dann ebenfalls 2 Pkt.)*.
*Eine weitere Möglichkeit, dies zu sehen:* Die Funktion $f$ ist harmonisch, wie man direkt an der Hesse-Matrix ablesen kan, nimmt also ihre Extrema auf dem Rand an *(dafür ebenfalls 2 Pkt.)*. ]

**(c)** Die Extrema müssen somit auf dem Rand angenommen werden. Um festzustellen wo, benutze den Lagrange-Multiplikator. Der Rand kann beschrieben werden als $\partial M = h^{-1}(0) = \{(x,y) \mid h(x,y) = 0\}$ mit der Funktion $h(x,y) := x^2 + 4y^2 - 4$. Eine notwendige Bedingung für ein Maximum auf dem Rand ist daher $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y)$ **(1 Pkt.)**, also die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 4y = \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \tfrac{\partial h}{\partial x} = \lambda 2x \\ 4x = \tfrac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \tfrac{\partial h}{\partial y} = \lambda 8y \qquad \textbf{(1 Pkt.)}. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ergibt $x = \lambda 2y$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $4y = \lambda^2 4y$, also $\lambda = \pm 1$. Damit wird die erste Gleichung zu $x = \pm 2y$. Setzt man dies in die Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 4$ ein, so ergibt sich $8y^2 = (2y)^2 + 4y^2 = 4$, also $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(1 Pkt.)** und somit $x = \pm(bzw.\mp)\frac{2}{\sqrt{2}} = \pm(bzw.\mp)\sqrt{2}$. Die Kandidaten für Extrempunkte sind also $z_1 := (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $z_2 := (-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $z_3 := (\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $z_4 := (-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ **(1 Pkt.)**.

Es sind $f(z_1) = f(z_4) = 4$ und $(z_2) = f(z_3) = -4$, also hat $f$ in $z_1$ und $z_4$ Maxima und in $z_2$ und $z_3$ Minima **(1 Pkt.)**.

## Aufgabe 5 (5 + 5 Punkte)

(a) Geben Sie eine genaue Formulierung des Banachschen Fixpunktsatzes.

(b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2} x_2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2} e^{-x_1} \end{aligned}$$

Genau eine Lösung in $[0,\infty) \times [0,\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$ hat.

**Lösung:**
**(a)** Banachscher Fixpunktsatz: Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine stetige Selbstabbildung **(1 Pkt.)**, die $d(f(x), f(y)) \le q \cdot d(x, y)$ für ein $q \in [0, 1)$ erfüllt **(2 Pkt.)**. Dann hat $f$ einen Fixpunkt **(1 Pkt.)** und dieser ist eindeutig **(1 Pkt.)**.

**(b)** Eine Lösung des Gleichungsssystems ist dasselbe wie ein Fixpunkt der Funktion $f\colon [0, \infty)^2 \to [0, \infty)^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}e^{-x_1})$ **(1 Pkt.)**. Es ist also zu zeigen, dass $f$ die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Bezeichne $d$ die zur $\ell_1$-Norm gehörige Metrik, d.h. für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ ist $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Dann ist $d(f(x), f(y)) = |\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2| + |\frac{1}{2}e^{-x_1} - \frac{1}{2}e^{-y_1}| = \frac{1}{2}|x_2 - y_2| + |-\frac{1}{2}e^{-\xi} \cdot (x_1 - y_1)|$ für ein $\xi$ zwischen $x_1$ und $y_1$, nach dem Mittelwertsatz **(2 Pkt.)**.
Wegen $x_1, y_1 \ge 0$ ist auch $\xi \ge 0$, daher $\frac{1}{2}e^{-\xi} \le \frac{1}{2}$ **(1 Pkt.)**. Es folgt $d(f(x), f(y)) \le \frac{1}{2}|x_2 - y_2| + \frac{1}{2}|x_1 - y_1| = \frac{1}{2}d(x, y)$. Also erfüllt $f$ die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes **(1 Pkt.)**.

## Aufgabe 6 (3+4 Punkte)

(a) Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Metrik an.

(b) Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ eine Metrik auf R definiert wird.

**Lösung:**
**(a)** Eine Metrik auf einer Menge $X$ ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit den Eigenschaften $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ **(1 Pkt.)**, $d(x, y) = d(y, x)$ **(1 Pkt.)** und $d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$ **(1 Pkt.)**.

**(b)** Klar sind $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ **(1 Pkt.)** und $d(x, y) = d(y, x)$ **(1 Pkt.)**. Weiterhin ist für $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

$$(d(x,y)+d(y,z))^2 = (\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|})^2 = |x-y|+2\sqrt{|x-y|}\sqrt{|y-z|}+|y-z| \ge |x-z| = d(x,z)^2$$

daher auch $d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$ **(2 Pkt.)**

## Aufgabe 7 (3+4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & y' = \frac{y}{x \cdot ln(x)}, \quad y(e) = 2 & \text{(3 Punkte)} \\ \text{(b)} & y' = y/x + x^2/y^2, \quad y(1) = 1 & \text{(4 Punkte)} \end{array}$$

**Lösung:**
**(a)** Trennung der Variablen: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x \cdot ln(x)} \quad \Rightarrow \quad ln(y) = \int \frac{y'}{y} = \int \frac{1}{x \cdot ln(x)} + C = (ln(ln(x))) + C \quad \Rightarrow$ $y = C' \cdot e^{(ln(x))} = C' \cdot x$ **(2 Pkt.)**
Aus der Anfangsbedingung ergibt sich $2 = y(e) = C' \cdot e$, also $C' = \frac{2}{e}$. **(1 Pkt.)**

**(b)** Betrachte die Funktion $f := \frac{y}{x}$. Es ist $f' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{f^2} \cdot \frac{1}{x}$.
Trennung der Variablen:

$$3 \cdot f' \cdot f^2 = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad f^3 = \int 3 \cdot f^2 \cdot f' = \int \frac{3}{x} = 3 \cdot ln(x) + C.$$

Es folgt $f = \sqrt[3]{3ln(x) + C}$, also $y = x \cdot f = x \cdot \sqrt[3]{3ln(x) + C}$ **(3 Pkt.)**. Aus der Anfangsbedingung ergibt sich $1 = y(1) = \sqrt[3]{3ln(1) + C} = \sqrt[3]{C}$, also $C = 1$ **(1 Pkt.)**.