

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II BLATT 3

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 9 (4 Punkte) Die Eulersche Beta-Funktion wird definiert durch das (ggf. uneigentliche) Integral

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Zeigen Sie:

- (a) $B(x, y)$ konvergiert für alle positiven reellen Zahlen x und y .
- (b) $B(x, y)$ divergiert, falls $x \leq 0$ oder $y \leq 0$.

Aufgabe 10 (4 Punkte) Zeigen Sie für die in Aufgabe 9 definierte Beta-Funktion, reelle Zahlen x, y und eine natürliche Zahl n die Identitäten

$$(a) \ B(x, y) = B(y, x) \qquad (b) \ B(x, n) = \frac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \qquad (c) \ B(x, y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds$$

Hinweis zu (c): substituieren Sie $s = \frac{t}{1-t}$.

Aufgabe 11 (4 Punkte) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Der Abstand von $x \in X$ zur Menge A ist definiert als

$$\text{dist}(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

- (a) Zeigen Sie, es gilt $\text{dist}(x, A) > 0$ genau dann, wenn $x \in (X \setminus A)^\circ$ und
- (b) die Abbildung $\text{dist}(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{dist}(x, A)$, ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

Aufgabe 12 (4 Punkte) Wir erinnern an die Definition der beiden unendlich dimensional Vektorräume $C([0, 1])$ der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ und ℓ^1 der absolut summierbaren Folgen.

$$C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \quad \text{und} \quad \ell^1 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Fortan, und insbesondere in dieser Aufgabe, dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass durch $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ und $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ Normen auf $C([0, 1])$ gegeben werden und durch $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, für $1 \leq p < \infty$, und $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup \{ |x_n| \mid n \in \mathbb{N} \}$ Normen auf ℓ^1 gegeben werden.

- (a) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Vektorraum $C([0, 1])$ nicht äquivalent sind.
- (b) Es seien $p, q \in [1, \infty]$ unterschiedlich. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ auf dem Folgenraum ℓ^1 nicht äquivalent sind.

Hinweis: Um notatorischen Aufwand zu sparen verwendet man bei Intervallen für sog. Hölder-Exponenten manchmal auch “im unendlichen abgeschlossene” Intervalle, wie z.B. $p \in [1, \infty]$. Die bedeutet lediglich, dass $p \in [1, \infty)$ oder $p = \infty$ gilt, also die Norm $\|\cdot\|_p$ (für $p \in [1, \infty)$) bzw. $\|\cdot\|_\infty$ (für $p = \infty$) gemeint ist.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 04.11.2025, 12.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 12.11.2025 in der Übung