

**ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II**  
**BLATT 4**

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:  
 MatrNr: ..... MatrNr: ..... MatrNr: .....

**Aufgabe 13 (4 Punkte)** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Die bereits in Aufgabe 11 eingeführte Abstandsfunction lässt sich wie folgt verallgemeinern: Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen  $K \subset X$  und  $A \subset X$  ist

$$\text{dist}(K, A) := \inf \{ \text{dist}(x, A) \mid x \in K \} = \inf \{ d(x, y) \mid x \in K, y \in A \}.$$

- (a) Zeigen Sie: Ist  $A$  abgeschlossen,  $K$  kompakt und  $A \cap K = \emptyset$ , so gilt  $\text{dist}(K, A) > 0$ .
- (b) Stimmt die Aussage in (a), wenn von  $K$  lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird? Begründen Sie.

**Aufgabe 14 (4 Punkte)** Bestimmen Sie  $\partial M$ ,  $\overline{M}$  und  $M^\circ$  für die Teilmenge

$$M = \left\{ \left( x, \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid 0 < x < \frac{1}{\pi} \right\}$$

des  $\mathbb{R}^2$ , der mit der euklidischen Norm ausgestattet sei. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

**Aufgabe 15 (4 Punkte)** Es seien  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A, B \subset X$ . Zeigen Sie:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | (c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| (b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$              | (d) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$              |

Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten.

**Aufgabe 16 (4 Punkte)** Welche der folgenden linearen Abbildungen sind stetig? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

- (a)  $A : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto Af := \int_a^b f(x) dx$
- (b)  $B : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_1)$ ,  $f \mapsto f$
- (c)  $C : (C([a, b]), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ,  $f \mapsto f$

Die involvierten Normen sind definiert durch  $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$  und  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ .

**Abgabe:** in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 11.11.2025, 12.25 Uhr  
**Besprechung:** ab Mi., 19.11.2025 in den Übungen