

13	14	15	16		Σ
----	----	----	----	--	---

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II BLATT 4

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 13 (4 Punkte) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Die bereits in Aufgabe 11 eingeführte Abstandsfunktion lässt sich wie folgt verallgemeinern: Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $K \subset X$ und $A \subset X$ ist

$$\text{dist}(K, A) := \inf \{ \text{dist}(x, A) \mid x \in K \} = \inf \{ d(x, y) \mid x \in K, y \in A \}.$$

- (a) Zeigen Sie: Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, so gilt $\text{dist}(K, A) > 0$.
- (b) Stimmt die Aussage in (a), wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird? Begründen Sie.

Aufgabe 14 (4 Punkte) Bestimmen Sie ∂M , \overline{M} und M° für die Teilmenge

$$M = \left\{ \left(x, \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) \mid 0 < x < \frac{1}{\pi} \right\}$$

des \mathbb{R}^2 , der mit der euklidischen Norm ausgestattet sei. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

Aufgabe 15 (4 Punkte) Es seien (X, τ) ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

- (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- (c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
- (b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
- (d) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten.

Aufgabe 16 (4 Punkte) Welche der folgenden linearen Abbildungen sind stetig? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

- (a) $A : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto Af := \int_a^b f(x) \, dx$
- (b) $B : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_1), f \mapsto f$
- (c) $C : (C([a, b]), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty), f \mapsto f$

Die involvierten Normen sind definiert durch $\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in [a, b] \}$ und $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 11.11.2025, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 19.11.2025 in den Übungen