HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
PROF. DR. FLORIAN JARRE
DR. JOSEPH ADAMS

17	18	19	20	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 5

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 17 (2+2 Punkte) Es sei $p \in [1, \infty]$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitskugeln in $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ bzw. $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt sind.

(b) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lipschitz-stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, deren Lipschitz-Konstanten alle kleiner gleich einem festen $L > 0$ sind. Zeigen Sie: Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent, so konvergiert die Folge bereits gleichmäßig.

Hinweis: Die „kleinen“ ℓ^p Räume und zugehörige Normen $\|\cdot\|_p$, für $1 < p \leq \infty$, werden analog zu dem Ihnen bekannten ℓ^1 definiert. Also $\ell^p = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|(x_n)_n\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\right\}$.

Aufgabe 18 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(A) = \exp(a) \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gilt $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und die Potenzen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ können direkt durch Matrix-Multiplikation berechnet werden. Die Definition der Exponential-Funktion für Matrizen ist analog zu derjenigen für Zahlen, über die Potenzreihe.

Aufgabe 19 (2+2 Punkte) Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei ihre Minkowski-Summe definiert durch

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

Aufgabe 20 (1+1+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Gradienten von

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x + \exp(yzw^2).$$

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ x \\ \frac{1+x^2}{1+y^2}. \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix der Funktion aus Teil (a).

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 18.11.2025, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 26.11.2025 in den Übungen