HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
PROF. DR. FLORIAN JARRE
DR. JOSEPH ADAMS

21	22	23	24	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 6

Name: ....   Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ....

Aufgabe 21 (4 Punkte)

(a) Es seien $c > 0$, $\nu \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \psi(x,t) = f(x \cdot \nu - c|\nu|t)$$

eine Lösung der sogenannten linearen Wellengleichung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta\psi(x,t)$ ist. Hierbei bezeichnet $x \cdot \nu = \sum_{i=1}^n x_i \nu_i$ das $\mathbb{R}^n$-Skalarprodukt und $\Delta f(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t)$ den Laplace-Operator.

(b) Berechnen Sie für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $G(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|^\alpha)$, sowie $\Delta G(x)$. Für welche Werte von α erfüllt G die Laplace-Gleichung $\Delta G = 0$.

Hinweis: Aufgrund ihres häufigen Vorkommens kürzt man die euklidische Norm eines Vektors als $|x| := \|x\|_2$ ab.

Aufgabe 22 (4 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Man zeige:

(a) f ist eine C^1-Funktion auf $\mathbb{R}^2$.

(b) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} f$ und $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x} f$ existieren auf $\mathbb{R}^2$ und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 1$ und $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x} f(0,0) = -1$

Aufgabe 23 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

(a) alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren,

(b) die Formel $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \nabla f(0) \cdot \xi$ für die Richtungsableitung in Richtung $\xi \in \mathbb{R}^2$ nur in Ausnahmefällen zutrifft,

(c) f im Nullpunkt unstetig ist.

Aufgabe 24 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto xy^2 + y\exp(-xy)$$

in Richtung $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ in den Punkten $\xi_1 = (1,0)$ und $\xi_2 = (2,3)$.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 25.11.2025, 12.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 03.12.2025 in der Übung