Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Dr. Joseph Adams

25	26	27	28	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 7

Name: ....   Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ....

Aufgabe 24 (1+1+1+1=4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad (x, y) \mapsto (x-1)^2 + 100(y - x^2)^2.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.
(b) Geben Sie alle kritischen Stellen von f an und überprüfen Sie, ob es sich dabei um lokale Extremstellen handelt.
(c) Was ist die globale Minimalstelle von f? Begründen Sie.
(d) Skizzieren Sie die Höhenlinie $f(x, y) \equiv 4$. Bestimmen Sie dazu für $x = -1, 0, 1, 2, 3$ jeweils die Werte von y, sodass $f(x, y) = 4$ gilt.

Hinweis zu (d): Da der Gradient entlang der Höhenlinie nie Null ist, ist die Höhenlinie glatt.

Aufgabe 26 (4 Punkte) Für partiell differenzierbare Funktionen $G = (G_1, G_2, \dots, G_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega' \to \mathbb{R}^3$ definiert man die Divergenz von G bzw. die Rotation von F durch

$$\operatorname{div} G = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial G_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial x_i},$$

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist F zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$.
(b) Ist $\phi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist $\operatorname{rot} \nabla\phi = (0, 0, 0)$.

Kann es eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ geben, so dass $\nabla\phi(x) = (x^2 - yz, y^2 - xz, -xy)$? Falls ja, bestimmen Sie eine solche. Gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion F mit $\operatorname{rot} F = x$?

Aufgabe 27 (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^2 y - x^2 - 2xy + 2x - y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte, ob dort ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 28 (4 Punkte, Beispiel von Peano) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x, y) = (x - \frac{y^2}{3})(x - y^2).$$

(a) Berechnen Sie $\nabla P(x, y)$ und zeigen Sie, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von P ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix von P im Punkt $(0, 0)$ positiv semidefinit ist und dass in $(0, 0)$ kein lokales Extremum vorliegt.
(c) Zeigen Sie, dass für jedes $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ die Funktion $\phi_\xi : t \mapsto P(t\xi_1, t\xi_2)$ in 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 02.12.2025, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 10.12.2025 in den Übungen