Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Dr. Joseph Adams

37	38	39	40	Z	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 10

Name: ....   Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ....

Aufgabe 37 (4 Punkte) Eine verschärfte Version des Banachschen Fixpunktsatzes lautet: Es sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f\colon X \to X$ sei eine Abbildung, so dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert womit f^n eine Kontraktion ist. Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt.

Zeigen Sie diese Variante des Banachschen Fixpunktsatzes und geben Sie einen Raum (X, d) sowie eine Abbildung $f\colon X \to X$, die keine Kontraktion ist, aber die Voraussetzungen der obigen Variante erfüllt sind.

Hinweis: Mit f^n ist die n-te Iterierte der Abbildung f bezeichnet, also $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ usw.

Aufgabe 38 (1+2+1 Punkte, Fixpunktsatz von Edelstein)

(a) Finden Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zwar Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist, aber keinerlei Fixpunkte besitzt.

(b) Es seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f\colon X \to X$ mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie: Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt.

(c) Geben Sie ein Beispiel an für das der Banachsche Fixpunktsatz nicht die Existenz eines Fixpunktes liefert, der Fixpunktsatz von Edelstein aber schon.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = d(x, f(x))$. Mit ein bisschen mehr Mühe könnte man auch für diesen Fixpunktsatz zeigen, dass die Folge $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x_0 \in X$ gegen den Fixpunkt konvergiert.

Aufgabe 39 (4 Punkte) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $g, h : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Betrachten Sie die sog. Bernoullische Differentialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0.$$

Zeigen Sie: Ist I ein offenes Intervall in J und $\psi : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\psi'(x) + (1 - \alpha)g(x)\psi(x) + (1 - \alpha)h(x) = 0$$

und $\psi(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist $\phi(x) = \psi(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung.

Aufgabe 40 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' = 8xy - xy^{3/4}.$$

Geben Sie für jede Lösung ihren maximalen Definitionsbereich an.

Zusatzaufgabe (4 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Eulerschen Differenzialgleichung für $x \in (0, \infty)$ und gegebenen Anfangswertaufgabe

$$y' = -2\frac{y}{x} + \frac{1}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

Hinweis: Zusatzaufgabe bedeutet, dass Sie mit dieser Aufgabe Bonuspunkte für die Zulassung sammeln können. Die Zulassungsgrenze orientiert sich weiterhin an $13 \times 4 \times 4 = 208$ Punkten, die es regulär auf den Übungsblättern gibt.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 06.01.2026, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 14.01.2026 in den Übungen